Matemáticas financieras

El valor del dinero en el tiempo

Zbigniew Kozikowski

McGraw Hill

Matemáticas financieras

El valor del dinero en el tiempo

Matemáticas financieras

El valor del dinero en el tiempo

Zbigniew Kozikowski Zarska

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Toluca

McGraw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA
MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Director editorial: Ricardo A. del Bosque Alayón
Editor sponsor: Jesús Mares Chacón
Editora de desarrollo: Marcela I. Rocha Martínez
Supervisor de producción: Zeferino García García

MATEMÁTICAS FINANCIERAS
El valor del dinero en el tiempo
Primera edición

McGraw-Hill Interamericana

Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN-13: 978-970-10-6061-2
ISBN-10: 970-10-6061-X

1234567890 09865432107

Impreso en México *Printed in Mexico*

Contenido breve

Contenido

Sobre el autor

El doctor Zbigniew Kozikowski nació en Polonia. Cursó sus estudios de licenciatura en economía (1967) y maestría en comercio internacional (1969) en la Escuela Superior de Planificación y Estadística (actualmente: Escuela Superior de Comercio) en Varsovia. Obtuvo el grado de doctor en Ciencias Económicas en 1974, en la misma escuela.

En el periodo de 1970-1977, se desempeñó como profesor adjunto en el Departamento de Economía Política de la Facultad de Comercio Exterior, Escuela Superior de Planificación y Estadística, Varsovia, Polonia.

Entre 1977 y 1994 trabajó como profesor-investigador en el Centro de Graduados e Investigación del Instituto Tecnológico de Durango.

Desde enero de 1994 es profesor titular del Departamento de Contabilidad y Finanzas del ITESM, Campus Toluca.

En las universidades donde trabajó impartió 20 materias diferentes en áreas de economía y finanzas. Sus especialidades incluyen (en el orden cronológico): desarrollo económico, crecimiento económico, planificación económica, teoría económica, finanzas internacionales, métodos cuantitativos en finanzas.

Sus publicaciones incluyen 55 artículos sobre economía y política económica en varias revistas, más 6 libros. Su más reciente libro es *Finanzas internacionales*, 2a. edición, publicado por McGraw-Hill Interamericana Editores, en 2006.

Participó en varios congresos e impartió más de 60 conferencias.

Prefacio

El presente libro es una extensión de los apuntes elaborados por el autor para impartir el módulo de Matemáticas financieras en varios diplomados de finanzas. El libro fue extensamente probado en los diplomados dirigidos a los ejecutivos de la FIRA, así como a otros ejecutivos bancarios y de finanzas. Durante tres semestres el libro fue utilizado como el texto básico en la materia Matemáticas financieras, impartida en la licenciatura en Contaduría pública y finanzas.

El nivel de dificultad del material es intermedio. Se supone que el lector domina las bases matemáticas necesarias para el estudio de los métodos cuantitativos en las finanzas. Para los lectores que puedan tener algunas dificultades en este aspecto el capítulo 2 incluye una breve revisión de las técnicas matemáticas utilizadas en este libro.

A QUIÉN VA DIRIGIDO ESTE LIBRO

El libro puede ser utilizado en varios contextos. Además de un apoyo básico en la materia Matemáticas financieras, puede ser un apoyo muy valioso en materias tales como: Administración financiera, Finanzas corporativas, Evaluación de proyectos, Inversiones, Mercados de dinero y capitales, Métodos cuantitativos en finanzas. Más que un libro típico de matemáticas financieras, el presente texto pretende ser una introducción al estudio de las finanzas.

La disciplina de las finanzas enseña cómo asignar los recursos escasos a través del tiempo en condiciones de incertidumbre. Tiene tres sustentos metodológicos: el valor del dinero en el tiempo, la valuación y la administración del riesgo. El libro cubre totalmente el valor del dinero en el tiempo y la parte cuantitativa de la valuación.

Además de ser una base metodológica para los que se inician en el estudio de las finanzas, el libro es especialmente útil para los que ya desempeñan diferentes funciones financieras dentro de las empresas y desean actualizar y profundizar sus conocimientos.

PRINCIPIOS QUE GUÍAN EL LIBRO

- Cobertura amplia.
- Presentación entendible.
- Aplicabilidad a situaciones prácticas.
- Flexibilidad.

LA IMPORTANCIA DE LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS EN FINANZAS

Desde principios de la década de 1980, el análisis financiero se desarrolló de manera impresionante. Al mismo tiempo, la competencia estrechó los márgenes de utilidad de las empresas. El éxito de las empresas depende más que nunca de un manejo hábil de sus finanzas. La distancia entre el éxito y el fracaso es más estrecha que nunca. Los centavos también cuentan. Al mismo tiempo, la disponibilidad de equipo electrónico de cálculo (calculadoras científicas y financieras, computadoras con paquetes especializados) vuelve práctico el uso de métodos conocidos desde hace tiempo pero poco utilizados por su dificultad técnica.

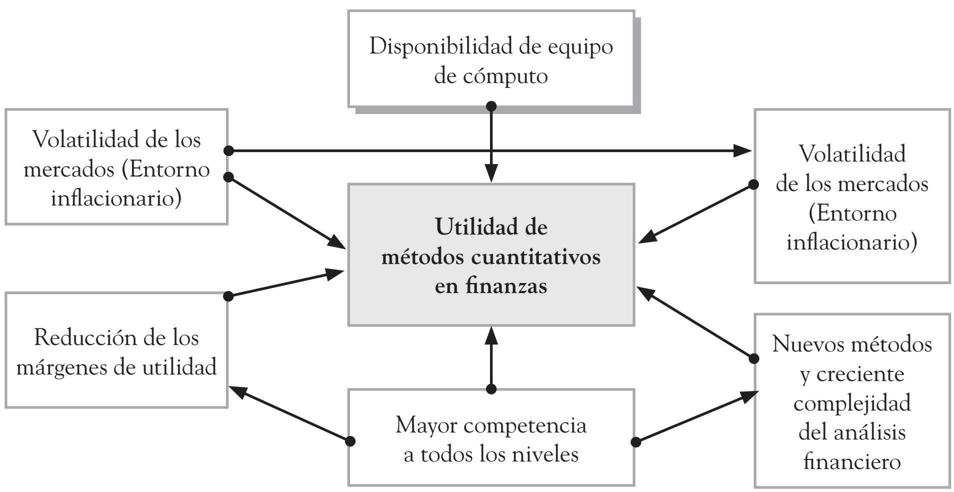
La necesidad de un análisis financiero más fino, aunada a la disponibilidad general de equipo de cálculo, hace imprescindible la actualización profesional de los ejecutivos de finanzas y eleva los requisitos para los aspirantes a esta profesión. Al mismo tiempo, la extrema volatilidad de los mercados hace que los cálculos deban ser actualizados con frecuencia. Todo esto sugiere que el presente texto será de gran utilidad práctica para las personas que logren dominarlo.

La presencia de una inflación alta y variable vuelve necesario hacer cálculos en términos de los *valores reales* (a precios constantes). Esto requiere eliminar el efecto de la inflación, deflactar las variables nominales. El cálculo del rendimiento real tiene que ser muy cuidadoso para no caer en una impresión de que estamos ganando dinero, cuando en realidad lo estamos perdiendo.

La siguiente gráfica reúne los factores que deben motivar al alumno a tomar en serio el estudio de los métodos cuantitativos en finanzas.

Figura 1

La importancia de los métodos cuantitativos en finanzas.



EL USO DE LA CALCULADORA FINANCIERA

El texto no pretende ser una publicidad ni un instructivo de ninguna calculadora financiera en particular; sin embargo, la experiencia demuestra que la mayoría de los ejecutivos de finanzas en las empresas mexicanas usan una de las dos calculadoras, de Hewlett Packard: HP-17BII y HP-19BII. En el ámbito internacional la situación es semejante. Además, la experiencia docente indica que la exposición simultánea de los métodos de las matemáticas financieras junto con las técnicas de usar la calculadora financiera da muy buenos resultados. Motiva al alumno y le permite resolver más problemas en menos tiempo. Por estas razones se tomó la decisión de introducir la explicación de los pasos necesarios para resolver los problemas de las matemáticas financieras en la calculadora HP-17BII. Es una calculadora financiera completa, muy popular y su uso es semejante al de otras calculadoras.

INTERPRETACIÓN ECONÓMICA

Un rasgo distintivo del libro es enfoque en la *interpretación económica* de las diferentes técnicas de las matemáticas financieras. En este sentido, constituye una excelente introducción a la economía financiera y al mercado de dinero y de capitales. No solamente es necesario saber cómo calcular, también es imprescindible interpretar los resultados. El dominio de los temas contenidos en este libro es indispensable para la toma racional de las decisiones financieras.

El último capítulo está dedicado al análisis de métodos de evaluación de proyectos de inversión. Esta parte fortalece los conceptos del valor del dinero en el tiempo, destaca las ventajas y los puntos débiles de diferentes métodos, compara los métodos del valor presente neto y la tasa interna de retorno y enfatiza el uso metodológicamente correcto de diferentes métodos. Esta parte puede ser tratada como una continuación de matemáticas financieras, o como una introducción a la materia Evaluación de Proyectos. Su cabal comprensión permite evitar errores metodológicos más arraigados.

RASGOS DISTINTIVOS DEL LIBRO

- Alto nivel de análisis matemático, económico y financiero. El contenido no es un conjunto de recetas de cocina, sino una explicación desde origen de varios métodos de análisis.
- Enfoque unificado. Se enfatiza el concepto de **equivalencia** entre diferentes métodos y enfoques.
- Introducción a finanzas. Explicación clara de los fundamentos de la economía financiera.
- Ayuda para la toma de decisiones. El libro enfatiza la comparación de alternativas y la toma de decisiones correctas.
- Un capítulo dedicado específicamente a los aspectos matemáticos y financieros de la valuación de activos.
- Un capítulo dedicado a la estructura de las tasas de interés.

RECONOCIMIENTOS

Aprovecho la oportunidad para agradecer a la dirección del Departamento de Contabilidad y Finanzas, a la dirección de la División de Administración y Humanidades y a la Dirección General del ITESM Campus Toluca por todo el apoyo que me brindaron para la realización de esta obra.

CAPÍTULO 1

Introducción

Objetivos del aprendizaje

Después de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

- Definir el campo de estudio de las matemáticas financieras.
- Apreciar la importancia de las matemáticas financieras en finanzas y economía.
- Entender por qué el valor del dinero cambia con el tiempo.
- Interpretar la tasa de interés como el precio del dinero.
- Explicar los componentes de la tasa de interés nominal.
- Entender en términos generales los diferentes adjetivos que acompañan la tasa de interés.
- Distinguir entre un rendimiento nominal y un rendimiento real.
- Calcular el rendimiento real.
- Entender los dos métodos del descuento.
- Transformar la tasa de descuento en la tasa de rendimiento y viceversa.
- Visualizar la importancia del análisis de los flujos de efectivo descontados en el proceso de valuación de activos.

Las finanzas son una disciplina científica que estudia cómo asignar recursos escasos a través del tiempo en condiciones de incertidumbre. Los tres pilares analíticos de las finanzas son:

- El valor del dinero en el tiempo
- La valuación de activos
- La administración del riesgo

Las matemáticas financieras son un conjunto de métodos matemáticos que permiten determinar el *valor del dinero en el tiempo*. Las técnicas de matemáticas financieras facilitan las comparaciones económicas. Es indispensable conocer estos métodos para comprender la mayoría de los temas que abarcan las finanzas. Entre estos temas se incluye el costo del capital, las decisiones sobre la estructura financiera, la evaluación de proyectos de inversión, el rendimiento de los bonos y otros instrumentos financieros, la valuación de títulos, las decisiones de arrendar o solicitar préstamo, etcétera.

EL VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO

El supuesto básico es que el dinero aumenta su valor en el tiempo. Esto significa que una cantidad determinada que se recibirá en el futuro vale menos que la misma cantidad en el presente. Muchos creen que las diferencias en el valor del dinero en diferentes momentos del tiempo se deben a la inflación y la subsecuente pérdida del poder adquisitivo. En realidad, *incluso si no hubiera inflación, el dinero futuro valdría menos que el presente*. Esto se debe a la preferencia de los consumidores por el consumo corriente *contra* el consumo futuro y la posibilidad de invertir los recursos en proyectos que tienen un rendimiento real (véase figura 1.1).

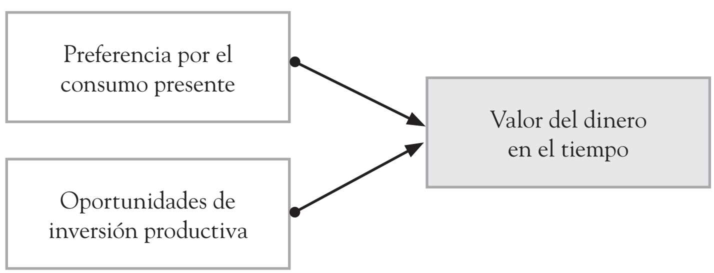
La inversión en activos físicos y en capital humano aumenta la capacidad productiva y contribuye a una mayor generación de riqueza en el futuro. Para invertir es necesario ahorrar, es decir, abstenerse del consumo presente. Dado que la inversión produce riqueza y aumenta el consumo futuro, quien invierte tiene que pagar a quien ahorra un precio por el uso del ingreso presente. Este precio se llama *tasa de interés*.

El interés es el pago por el uso del dinero.

Como cualquier precio, la tasa de interés depende de la oferta y la demanda. La oferta de dinero (de fondos prestables) depende de las preferencias por el consumo presente contra el consumo futuro. La demanda de fondos prestables depende de las oportunidades de inversión. En una economía con poca disponibilidad de ahorros y muchas oportunidades de inversión productiva el dinero es caro (las tasas de interés son altas). En cambio, en una economía con abundancia de ahorros y escasez de oportunidades de inversión el dinero es barato.

Figura 1.1

Fuentes del valor del dinero en el tiempo.



DIFERENTES PERSPECTIVAS SOBRE LA TASA DE INTERÉS

La tasa de interés pasiva es la tasa que el banco paga a sus depositantes.

La tasa de interés activa es la tasa que el banco cobra a sus deudores.

El precio del dinero, o la tasa de interés, tiene dos nombres, dependiendo del punto de vista. De acuerdo con la percepción de un ahorrador, el precio que él recibe por el dinero es el *rendimiento*. El ahorrador es una persona con exceso de fondos que pretende transformar su consumo presente en oportunidades de un consumo futuro mayor. Para lograrlo, invierte en *activos financieros*. El rendimiento que ofrecen estos instrumentos es el precio que el ahorrador obtiene por poner su dinero a disposición de las personas que lo necesitan. El ahorrador también puede ser llamado *acreedor*, *prestamista* o *inversionista*. Si invierte en un depósito bancario, el rendimiento que obtiene se llama *tasa de interés pasiva*.

Desde el punto de vista del deudor, la tasa de interés que él paga por el uso de los fondos es el *costo de capital*. El deudor emite los instrumentos financieros. También puede ser llamado *emisor* o *prestatario*. Si solicita un préstamo bancario, la tasa que paga se llama *tasa de interés activa*.

El precio del dinero

Acreedor (inversionista)	Deudor (emisor)
Tasa de interés (pasiva) Rendimiento	Tasa de interés (activa) Costo de capital

Cuando hablamos del precio del dinero, lo hacemos en términos de su poder adquisitivo, *en términos reales*. En la mayoría de los países, los precios se incrementan constantemente como consecuencia de un proceso llamado *inflación*. Este aspecto complica la situación porque el rendimiento nominal que obtiene el ahorrador (inversionista) tiene que compensarlo por la pérdida del poder adquisitivo provocada por la inflación y, además, proporcionarle un *rendimiento real*. La tasa de inflación es uno de los componentes de la tasa de interés nominal. Otros componentes de la tasa nominal son las primas de riesgo y de liquidez.

En la figura 1.2 presentamos los componentes más importantes de la tasa de interés nominal. El punto de vista es el del inversionista, por lo que la tasa nominal se llama *rendimiento requerido*, el cual es el rendimiento que tiene que ofrecer un instrumento financiero para que el inversionista lo adquiera. Este rendimiento compensa al inversionista por la pérdida del poder adquisitivo provocado por la inflación, le paga el precio del dinero en términos reales (la tasa real) determinado por la oferta y la demanda de fondos prestables y compensa el riesgo que corre el inversionista al adquirir un instrumento financiero.

Matemáticamente, la figura 1.2 puede expresarse como:

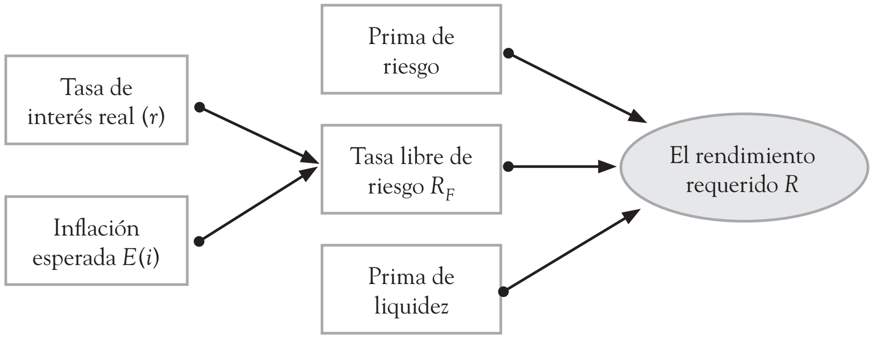
$$1 + R = \underbrace{\left(1 + r\right)\left(1 + E\left(i\right)\right)}_{1 + R_F}\left(1 + PR\right)$$

donde la prima de riesgo (PR) contiene también la prima de liquidez.

Así, el componente principal de cualquier tasa de interés es la *tasa libre de riesgo*, que incluye el rendimiento real y una prima que compensa al ahorrador por la pérdida del poder adquisitivo provocado por la inflación esperada. El rendimiento libre de riesgo lo ofrecen los instrumentos de deuda del Gobierno federal. En el caso de México, es el rendimiento de los

Figura 1.2

Factores que determinan el rendimiento requerido (la tasa de interés nominal).



Cetes a 28 días. En Estados Unidos es el rendimiento de los certificados del Tesoro (*Treasury bills* o *T-bills*).

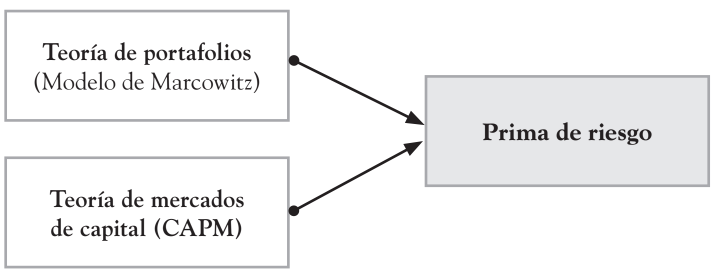
Las primas de riesgo[1] se cobran en el caso de los instrumentos financieros que representan riesgo de incumplimiento (el riesgo de crédito) o que tienen problemas de liquidez. El cálculo de la prima de riesgo es un punto central de esta parte de la teoría financiera, que se llama *valuación de activos*. En realidad, hay dos grupos de teorías que ayudan en la valuación de activos: la teoría de portafolios y la teoría de los mercados de capital (teoría de valuación de activos de capital) (véase figura 1.3).

En términos generales, el valor de un activo es el valor presente de los flujos de efectivo que se espera que genere el activo durante su vida. Así, el proceso de valuación consiste en tres etapas bien definidas:

1. Determinación de los flujos de efectivo esperados producidos por el activo.
2. Determinación de la tasa de descuento adecuada para llevar estos flujos al valor presente. Esta tasa es el rendimiento requerido por los inversionistas que desean comprar el activo en cuestión y consiste en la tasa libre de riesgo y la prima de riesgo.
3. Cálculo del valor presente de los flujos de efectivo esperados. Si los datos obtenidos en las dos primeras etapas son fidedignos, es un proceso meramente aritmético (véase figura 1.4).

Figura 1.3

Teorías que ayudan a determinar la prima de riesgo adecuada para un activo financiero particular.



[1] La prima de riesgo también puede llamarse **sobretasa** o ***spread***.

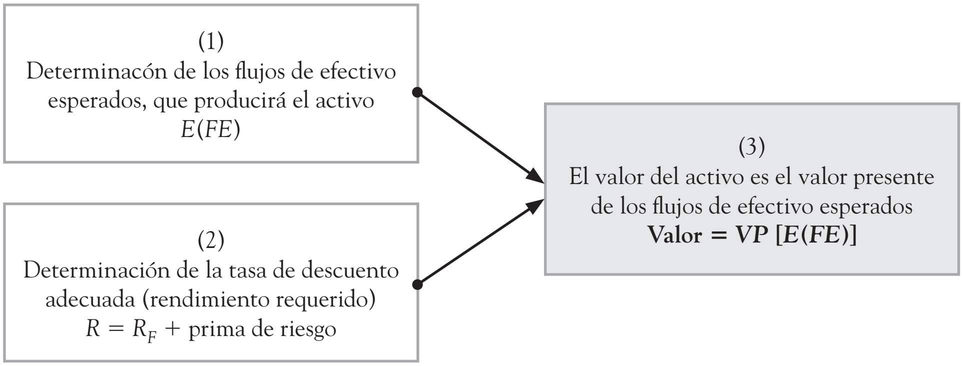


Figura 1.4

Proceso de determinación del valor de un activo financiero.

Dado que el concepto "tasa de interés" con frecuencia está acompañado de algún adjetivo, definimos a continuación las diversas tasas de interés:

La *tasa de interés nominal* (R), también conocida como *tasa contractual*, es la tasa de interés en términos de pesos corrientes. R representa el costo de oportunidad del dinero más una compensación por la pérdida de poder adquisitivo provocada por la inflación.

La *tasa de interés real* (r) es la tasa de interés en términos de pesos constantes. Es la tasa de crecimiento del poder adquisitivo del dinero. La tasa real representa el costo de oportunidad del dinero.

La *tasa de interés efectiva* representa la tasa anual de crecimiento del dinero tomando en cuenta la frecuencia de capitalización.

La *tasa de interés equivalente* es la tasa nominal con una frecuencia de capitalización que produce el mismo rendimiento efectivo que otra tasa nominal con diferente frecuencia de capitalización.

Cuando un acreedor concede un préstamo P_0 por un año, al vencimiento espera recuperar el poder adquisitivo de su dinero y, además, obtener algún rendimiento real. Si el monto del préstamo es de \$100 y la inflación esperada es de 20%, para mantener su poder adquisitivo debe recibir $100(1 + 0.2) = 120$. Esta cantidad a precios corrientes tiene el mismo poder adquisitivo que \$100 a precios constantes.

En términos simbólicos: $$P_1 = P_0(1 + i)$$

Además, si el acreedor espera un rendimiento real de 5%, debe recibir:

$$100(1 + 0.2)(1 + 0.05) = 126$$

En un año, 126 pesos tendrán un poder adquisitivo 5% mayor que \$100 ahora.

En términos simbólicos: $$P_1 = P_0(1 + i)(1 + r)$$

En realidad, el prestamista cobra una sola tasa de interés nominal, R:

$$P_1 = P_0(1 + R)$$

La tasa nominal incluye tanto la compensación por la pérdida del poder adquisitivo del dinero prestado, i, como el rendimiento real, r.

La relación entre la tasa nominal, la tasa real y la inflación esperada suele llamarse *ecuación de Fisher.*

$$\boxed{1 + R = (1 + r)(1 + i)}$$

donde,

R es la tasa de interés nominal (o tasa contractual)

r es la tasa de interés real

$i = E(i)$ es la tasa de inflación esperada

Despejando la tasa nominal, tenemos:

$$R = (1 + r)(1 + i) - 1 = r + i + ri$$

$$\boxed{R = r + i + ri}$$

EJEMPLO 1

Si $r = 8\%$ e $i = 50\%$, la tasa nominal $R = 62\%$ (y no 58%).

El producto ri puede pasarse por alto sólo si la inflación es muy baja. Por ejemplo, si la inflación es de 4% anual y la tasa real, $r = 3\%$, el producto $ri = 0.0012$, una cantidad insignificante.

Despejando de la ecuación de Fisher la tasa real, tenemos:

$$1 + r = \frac{1 + R}{1 + i}, \text{ de donde,}$$

$$\boxed{r = \frac{R - i}{1 + i}}$$

La división entre $(1 + i)$ elimina el efecto de la inflación y calcula el valor real, o el valor a precios constantes. Si después de un año tenemos 126 pesos, dividiendo esta cantidad entre 1.2 obtenemos el valor en pesos constantes de hace un año, esto es, 105. El proceso de llevar los valores a precios corrientes a valores a precios constantes se llama *deflactación*. Deflactar significa eliminar el efecto de la inflación, dividiendo entre uno más la inflación acumulada entre el periodo base y el periodo actual. Por ejemplo, si la inflación acumulada en los primeros siete meses de 1998 es de 9.5%, al dividir el valor a precios corrientes del 1 de agosto entre 1.095 obtenemos este valor a precios constantes de 1 de enero. El 1 de agosto 1 000 pesos tienen el mismo poder adquisitivo que 1 000/1.095 = \$913.24 el 1 de enero.

Es muy importante saber distinguir entre los valores nominales y los reales. En planificación financiera a largo plazo (por ejemplo, evaluación de proyectos de inversión) sólo tiene sentido efectuar cálculos en términos reales.

La convención usada en este libro, generalmente aceptada en finanzas, es que, si la tasa de interés no tiene adjetivos, quiere decir que se trata de una *tasa nominal anual.*

CRECIMIENTO Y DESCUENTO

Las matemáticas financieras estudian básicamente dos fenómenos: el *crecimiento*[2] y el *descuento*.

El problema del crecimiento es calcular el *valor futuro* de una variable dado su *valor presente* y la *tasa de crecimiento*. El crecimiento es una de las principales fuentes del valor. Los cálculos del *valor futuro* permiten contestar la siguiente pregunta: ¿cuál será el valor futuro de una inversión cuyo rendimiento es R?(R también se denomina como la tasa de crecimiento o la tasa de interés).

El análisis de los flujos de efectivo esperados en el futuro es la base para calcular el valor. La pregunta que pretendemos responder es: ¿cuál es el valor presente de un flujo de ingresos futuros, si el costo de oportunidad de capital es R? Para resolver este problema se usa el proceso de *descuento* y, en este contexto, la tasa R se llama la *tasa de descuento*.

$$\text{Valor presente} \xrightarrow{\text{Crecimiento}} \text{Valor futuro}$$

$$\text{Valor presente} \xleftarrow{\text{Descuento}} \text{Valor futuro}$$

Cuando se usa el interés compuesto, la tasa de interés (tasa de rendimiento) y la tasa de descuento son las mismas. Con el interés simple, las dos tasas son diferentes. Dado que el interés simple se utiliza en las subastas de los bonos (Cetes) es útil establecer una equivalencia entre la tasa de rendimiento (R) y la tasa de descuento (R_D).

Supongamos que tenemos un pagaré (una promesa de pago) a un año con el valor nominal de \$100. ¿Cuál es el valor presente de este pagaré si se aplica una *tasa de descuento bancario* de 20%?

Con el método del descuento bancario, el descuento se calcula sobre el valor nominal:

$$\text{Descuento} = \text{valor nominal} \times \text{tasa de descuento}$$

$$D = B_N \times R_D$$

En nuestro ejemplo, el descuento es igual a $100 \times 0.2 = 20$.

El valor descontado (valor presente) del pagaré es el valor nominal menos el descuento:

$$\text{Valor presente} = \text{valor nominal} - \text{descuento}$$

$$\begin{aligned} B_0 &= B_N - D \\ &= B_N - B_N \times R_D = B_N\,(1 - R_D) \end{aligned}$$

En nuestro ejemplo, $B_0 = 100 - 20 = 80$

[2] El crecimiento también se conoce con el nombre de **capitalización**. Sin embargo, el término capitalización tiene muchos otros significados, por lo que su uso es un tanto ambiguo.

Dividiendo la ecuación del valor presente del pagaré entre su valor nominal, obtenemos el valor presente por cada peso del valor nominal:

$$\frac{B_0}{B_N} = 1 - R_D$$

Si compramos un pagaré con el valor nominal de \$100 a \$80, ¿cuál es el rendimiento de nuestra inversión?

El rendimiento es la ganancia dividida entre la inversión inicial:

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{Ganancia}}{\text{Inversión inicial}}$$

En nuestro caso, la ganancia es igual al descuento, y el desembolso inicial es el valor presente (el precio) del pagaré. Así, el rendimiento es igual a 20/80 = 0.25, o sea 25%. Un descuento de 20% implica un rendimiento de 25%.

El rendimiento, o la tasa de interés, es la tasa de crecimiento del dinero que convierte el valor presente en el valor futuro.

$$B_0\,(1 + R) = B_N$$

En nuestro caso: $$80(1.25) = 100$$

Dividiendo ambos lados de esta ecuación entre el valor nominal, obtenemos el valor presente del pagaré por cada peso del valor nominal:

$$\frac{B_0}{B_N} = \frac{1}{1 + R}$$

Comparando las dos fórmulas del valor presente por cada peso del valor nominal obtenemos una equivalencia entre las tasas de rendimiento y de descuento:

Tasa de rendimiento (de interés), *R*	**Tasa de descuento bancario, R_D**
$\frac{B_0}{B_N} = \frac{1}{1 + R}$	$\frac{B_0}{B_N} = 1 - R_D$

Dado que la parte izquierda de estas dos ecuaciones son iguales, la derecha también debería ser igual:

$$\frac{1}{1 + R} = 1 - R_D$$

Esta ecuación representa la equivalencia entre la tasa de rendimiento y la tasa de descuento bancario.

Resolviendo respecto a la tasa de descuento (R_D), tenemos:

$$\boxed{R_D = \frac{R}{1 + R}}$$

En cambio, la relación entre la tasa de rendimiento y la de descuento es como sigue:

$$\boxed{R = \frac{R_D}{1 - R_D}}$$

EJEMPLO 1

Supongamos que un bono libre de riesgo que promete pagar \$100 en un año se vende en la actualidad en \$90. Entonces, la tasa de descuento es $R_D = 10\%$, porque $100(1 - 0.1) = 90$. Sin embargo, la tasa de rendimiento $R = 11.11\%$, ya que $100/(1 + 0.1111) = 90$.

Este ejemplo comprueba nuestra regla: $\dfrac{1}{1 + 0.1111} = 1 - 0.1$

Así, el verbo *descontar* podemos utilizarlo en dos contextos:

1. Descontar significa restar del valor nominal el descuento, que es el valor nominal multiplicado por la tasa de descuento:

$$B_0 = B_N\left(1 - R_D\right)$$

   Cuando se usa el interés simple, la tasa de descuento es menor que la tasa de rendimiento.

2. Descontar significa, también, dividir el valor nominal entre uno más la tasa de rendimiento:

$$B_0 = \frac{B_N}{\left(1 + R\right)}$$

Con este método de descuento, la tasa de descuento podemos interpretarla como rendimiento al vencimiento o la tasa interna de retorno.

El análisis de *flujos de efectivo descontados* es una técnica fundamental para medir el valor del dinero en el tiempo. Casi todas las decisiones implican una comparación del presente con el futuro: una inversión presente contra un flujo de efectivo en diferentes momentos en el futuro; consumo presente *contra* consumo futuro, etcétera.

Antes de empezar el estudio del valor del dinero en el tiempo es necesario que repasemos brevemente las técnicas matemáticas más utilizadas en el análisis financiero. El lector que se sienta cómodo con las matemáticas puede dar sólo un repaso rápido al siguiente capítulo.

FÓRMULAS DEL CAPÍTULO

Efecto Fisher $1 + R = (1 + r)(1 + i)$	Valor presente con el descuento bancario $B_0 = B_N\,(1 - R_D)$
Valor presente con el descuento racional $B_0 = \frac{B_N}{(1 + R)}$	Tasas de descuento y de rendimiento $R_D = \frac{R}{1 + R},\ R = \frac{R_D}{1 - R_D}$

Términos clave

Acreedor–inversionista
Activo financiero
Crecimiento
Descuento bancario
Deudor–emisor
En términos reales
Flujos de efectivo descontados
Matemáticas financieras
Prima de liquidez
Prima de riesgo
Relación de Fisher
Tasa de interés
Tasa de interés efectiva
Tasa de interés nominal
Tasa de interés real
Tasa de rendimiento
Tasa libre de riesgo
Tasas equivalentes
Valor del dinero en el tiempo
Valor futuro
Valor presente

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. ¿Por qué, incluso en un país sin inflación, no es lo mismo recibir una cantidad hoy que la misma cantidad dentro de un año?
2. ¿Es preferible recibir \$1 000 hoy o \$1 150 dentro de un año? ¿Qué factores se han de tomar en cuenta para contestar esta pregunta?
3. ¿Por qué el rendimiento de un inversionista es el costo de capital del emisor?
4. Explique el significado de la siguiente afirmación: “Comparándolo con el del año pasado, mi salario aumentó 5% en términos reales”.
5. ¿Qué significa que un activo es libre de riesgo? Proporcione algunos ejemplos de tales activos.
6. ¿Por qué el rendimiento de los activos de riesgos contiene una prima de riesgo?
7. ¿Quién y cómo asigna el monto de la prima de riesgo para un activo concreto?
8. ¿Por qué al comprar un activo financiero sólo se puede calcular su rendimiento real esperado?
9. ¿Qué factores económicos determinan la tasa de interés real?
10. La inflación en julio fue de 0.95%. El rendimiento de un instrumento financiero a un mes comprado el primero de julio fue de 22.5% (nominal, anual). Calcule la tasa de interés real en julio y la tasa real anualizada.
11. Explique la diferencia entre el descuento bancario y el descuento con la tasa de interés.
12. Si la tasa de descuento bancario sobre un instrumento es de 25%, ¿cuál es la tasa de rendimiento?

CAPÍTULO 2

Bases matemáticas

Objetivos del aprendizaje

Después de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

- Despejar una variable de una ecuación lineal.
- Calcular el cambio porcentual y el porcentaje del total.
- Utilizar las leyes de los exponentes.
- Saber diferenciar entre el promedio aritmético y el promedio geométrico.
- Utilizar las funciones exponenciales, sobre todo la función exponencial natural.
- Comprender las diferentes definiciones y la importancia del número *e*.
- Utilizar las leyes de los logaritmos.
- Calcular los antilogaritmos.
- Identificar los componentes de una progresión aritmética.
- Calcular el último término de una progresión aritmética.
- Calcular la suma de una progresión aritmética.
- Identificar los componentes de una progresión geométrica.
- Calcular el último término de una progresión geométrica.
- Calcular la suma de una progresión geométrica.

El nivel de las matemáticas que se utiliza en finanzas es bastante elemental. Sólo en finanzas avanzadas se usan métodos matemáticos sofisticados. En este capítulo, repasaremos brevemente las técnicas matemáticas empleadas con mayor frecuencia en la derivación y la transformación de las fórmulas financieras.

ECUACIÓN

La ecuación es la herramienta más importante en álgebra. Es la afirmación de que dos expresiones algebraicas conectadas por el signo = son iguales. En finanzas, una tarea muy importante es la habilidad para *formular una ecuación* en forma correcta; sin embargo, ésta no es una labor estrictamente matemática, pues requiere la comprensión del problema financiero y el conocimiento de los principios de álgebra.

Resolver una ecuación es una tarea puramente algebraica; significa *despejar* la variable que nos interesa en términos de otras variables y parámetros.

Para resolver una ecuación es necesario tener presentes las siguientes reglas:

1. A ambos lados de una ecuación se puede sumar el mismo número (o variable).
2. De ambos lados de una ecuación se puede restar el mismo número.
3. Ambos lados de una ecuación se pueden multiplicar por el mismo número.
4. Ambos lados de una ecuación se pueden dividir entre el mismo número (esto excluye obviamente la división entre cero, que es inadmisible).
5. Ambos lados de una ecuación se pueden elevar a la misma potencia.
6. Si la potencia es fraccionaria, esto equivale a sacar la raíz del mismo grado de ambos lados de una ecuación.

En realidad hay sólo tres reglas, puesto que restar un número es equivalente a sumar el mismo número con el signo negativo (las reglas 1 y 2 son equivalentes). Dividir entre un número es lo mismo que multiplicar por el recíproco de este número (las reglas 3 y 4 son equivalentes). Sacar una raíz de grado n es lo mismo que elevar a la potencia de $1/n$ (las reglas 5 y 6 son equivalentes).

En los siguientes ejemplos utilizaremos las reglas 1 a 4. La aplicación de las reglas 5 y 6 requiere que dé primero un repaso a los exponentes.

EJEMPLO 1

Resuelva la siguiente ecuación: $x + 15 = 60$

Solución:

$$x + 15 - 15 = 60 - 15$$ De ambos lados restamos 15 (regla 2)

Respuesta: $x = 45$.

EJEMPLO 2

Resuelva la siguiente ecuación: $5x + 25 = 100$

Solución:

$5x = 100 - 25 = 75$ Restamos 25 de ambos lados

$\frac{5x}{5} = \frac{75}{5} = 15$ Dividimos ambos lados entre 5

Respuesta: $x = 15$.

EJEMPLO 3

Resuelva la siguiente ecuación: $20 - 4x = -60$

Solución:

$-4x = -60 - 20 = -80$ Restamos 20 de ambos lados

$\frac{-4x}{-4} = \frac{-80}{-4} = 20$ Dividimos ambos lados entre (-4)

Respuesta: $x = 20$.

EJEMPLO 4

Resuelva la siguiente ecuación: $\frac{x}{4} - 5 = 13$

Solución:

$\frac{x}{4} = 13 + 5 = 18$ Sumamos 5 a ambos lados

$x = 18 \times 4 = 72$ Multiplicamos ambos lados por 4

Respuesta: $x = 72$.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Despeje x de la siguiente ecuación: $\frac{y+2}{x+1} = \frac{1}{3}$

Respuesta: $x = 3y + 5$.

PORCENTAJES

El por ciento de un número es una centésima parte de él.

$$\boxed{1\% = \frac{1}{100} = 0.01}$$

Calcular x por ciento de un número significa multiplicar dicho número por x y por 0.01.

EJEMPLO 1

¿Cuánto es 29% de 870?

Solución:

$$870 \times 29 \times 0.01 = 252.3$$

Respuesta: 29% de 870 es 252.3.

EJEMPLO 2

Sabemos que un descuento de 5% de un precio es igual a \$70. ¿Cuál es el precio? (¿Cuál es su 100%?)

Solución: Si 5% = 70, esto indica que 1% es igual a 70/5 = 14 y el 100% es igual a 1 400.

Respuesta: Si 5% es \$70, 100% es \$1 400.

Para aumentar una cantidad en x por ciento, multiplicamos dicha cantidad por $1 + x(0.01)$.

EJEMPLO 3

Hace un año la población de México era de 100 millones de personas. En un año la población aumentó en 1.2%. ¿Cuál es la población actual?

Solución:

$$100[1 + 1.2(0.01)] = 100(1.012) = 101.2$$

Respuesta: La población actual de México es de 101.2 millones.

EJEMPLO 4

En cuatro años las ventas de una empresa se incrementaron 360%. Si al inicio las ventas eran de \$100 000, ¿qué nivel alcanzan las ventas actuales?

Solución:

$$100[1 + 360(0.01)] = 100(4.6) = 460$$

Respuesta: Las ventas de la empresa son de \$460 000.

Observación: Al leer el problema, muchas personas contestan, sin reflexionar, que la respuesta es 360. Esto es un error muy frecuente.

Para reducir una cantidad en x por ciento, multiplicamos dicha cantidad por $1 - x(0.01)$.

EJEMPLO 5

El tipo de cambio del peso frente al dólar empezó la jornada a un nivel de 11.2 pesos por dólar. Durante el día, el dólar perdió 2.5% de su valor. ¿Cuál es el nuevo tipo de cambio al finalizar la jornada?

Solución:

$$11.2[1 - 2.5(0.01)] = 11.2(0.975) = 10.92$$

Respuesta: El dólar vale 10.92 pesos.

La reducción porcentual de una variable no es igual al incremento porcentual de su recíproco. Unos ejemplos ilustran este punto.

EJEMPLO 6

El tipo de cambio del peso frente al dólar subió de 3.4 a 7.6 pesos/dólar.

a) ¿Cuánto se apreció el dólar?

b) ¿Cuánto se depreció el peso?

Solución:

a) $$\frac{\text{Nuevo valor} - \text{Valor original}}{\text{Valor original}} = \frac{7.6 - 3.4}{3.4} = 1.2353 = 123.53\%$$

b) Para calcular la depreciación del peso primero debemos encontrar el valor del peso antes y después de su depreciación.

El valor del peso es la cantidad de dólares que éste puede comprar, esto es el recíproco del tipo de cambio: $1/3.4 = 0.2941$ y $1/7.6 = 0.1316$

Ahora ya podemos aplicar nuestra fórmula:

$$\frac{\text{Nuevo valor} - \text{Valor original}}{\text{Valor original}} = \frac{0.1316 - 0.2941}{0.2941} = -0.5526 = -55.26\%$$

Respuesta: El dólar se apreció 123.53%.

El peso se depreció 55.26%.

EJEMPLO 7

Hace cuatro años un inversionista compró una acción de una empresa por \$100. Durante estos 4 años, el valor de la acción permaneció constante. Mientras tanto, la inflación promedio en ese periodo fue de 6% anual. ¿Qué porcentaje de su poder adquisitivo perdió el inversionista?

Solución: La inflación en el periodo fue de: $(1.06)^4 - 1 = 0.2625 = 26.25\%$. Los precios subieron 26.25%, mientras la riqueza del inversionista, en términos nominales, permaneció constante. La tendencia natural es contestar que el inversionista perdió el 26.25% de su poder adquisitivo. Ésta no es la respuesta correcta.

Supongamos que hace 4 años el inversionista era capaz de comprar una canasta de bienes por $100. Ahora esta canasta cuesta $126.25. ¿Qué porcentaje de la canasta puede comprar ahora el inversionista?

$$\frac{100}{126.25} = 0.7921 = 79.21\%$$

El inversionista puede comprar 79.21% de la canasta, esto es 20.79% menos que hace 4 años.

Respuesta: El inversionista perdió el 20.79% de su poder adquisitivo.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

En 1995 la inflación anual fue de 52%. ¿Cuál fue la pérdida del poder adquisitivo de una persona que no recibió ningún aumento salarial en este año?

Respuesta: −34.2%.

Puntos porcentuales

La diferencia entre dos variables expresadas como porcentajes se mide en términos de *puntos porcentuales*. Por ejemplo, si una tienda ofrece un descuento de 5% sobre una mercancía y otra 7% sobre la misma mercancía, la diferencia entre los dos descuentos es igual a 2 puntos porcentuales.

Si el banco A ofrece un rendimiento de 27% sobre un pagaré a un mes y el banco B ofrece 30% sobre un instrumento semejante, la diferencia entre el rendimiento es de 3 *puntos porcentuales*. Decir que el banco B ofrece 3% más que el banco A es un error, porque 3% más que el 27% es $27 \times 1.03 = 27.81\%$.

Un *punto base* es una centésima de 1%. En nuestro ejemplo, la diferencia en el rendimiento de los dos bancos es de 300 puntos base (o puntos básicos).

Un punto porcentual es igual a 100 puntos base. Un punto base es igual a 0.0001.

EJEMPLO 8

La tasa de interés de 10.5% puede expresarse como 10% más 50 puntos base, o 1 050 puntos base. Si la tasa sube de 5.25% a 5.3%, decimos que el incremento fue de 5 puntos base.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

El año pasado las ventas de una empresa fueron de $1 200 000. Este año, las ventas bajaron en 8.5%. ¿Cuál es el nivel actual de ventas?

Respuesta: $1 098 000.

EXPONENTES

Si un número se multiplica por sí mismo repetidas veces, esta operación puede simplificarse elevando el número en cuestión a la potencia igual a la cantidad de veces que el número se multiplica por sí mismo. El número se llama *base* y la cantidad de veces que tiene que multiplicarse por sí mismo se llama *exponente*.

$2 \times 2 = 2^2 = 4$ 2 a la potencia de 2 es 4

$a \times a \times a = a^3$ a elevado a la potencia de 3

En general: $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ veces}}$ se lee como: "a elevado a la potencia de n", donde a es la base y n es el exponente o potencia.

Es indispensable dominar las leyes de los exponentes para estudiar matemáticas financieras.

Producto de dos potencias de la misma base

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

EJEMPLO 1

$$4 \times 4^2 \times 4^5 = 4^{1+2+5} = 4^8 = 65\,536$$

$$(4^1 = 4)$$

Cociente de dos potencias de la misma base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

EJEMPLO 2

$$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$$

$$\frac{2^2}{2^3} = 2^{2-3} = 2^{-1}$$

Potencia de una potencia

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \times n}$$

EJEMPLO 3

$$(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12} = 4\,096$$

Potencia del producto de dos factores

$$(ab)^n = a^n b^n$$

EJEMPLO 4

$$(3x)^4 = 3^4x^4 = 81x^4$$

Potencia del cociente de dos factores

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

EJEMPLO 5

$$\left(\frac{3x}{y}\right)^3 = \frac{3^3x^3}{y^3} = \frac{27x^3}{y^3}$$

Exponente cero

Si a es un número real diferente de cero, $a^0 = 1$

Esta regla se obtiene utilizando la regla del cociente de dos potencias:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^n}{a^n} &= 1 \\ \frac{a^n}{a^n} &= a^{n-n} = a^0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a^0 = 1$$

EJEMPLO 6

$$(5x)^0 = 1$$

Exponente negativo

Si n es un número entero positivo y $a \neq 0$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Esta regla se obtiene utilizando la regla del cociente de dos potencias:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^3}{a^5} &= a^{3-5} = a^{-2} \\ \frac{a^3}{a^5} &= \frac{a^3}{a^3a^2} = \frac{1}{a^2} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

EJEMPLO 7

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0.125$$

Exponentes fraccionarios

$$a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

EJEMPLO 8

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \qquad \left(\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}\right)$$

$$64^{2/3} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 4^2 = 16$$

$$81^{-1/4} = \frac{1}{81^{1/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81}} = \frac{1}{3}$$

En la práctica se utiliza una calculadora electrónica que tiene la tecla $\boxed{y^x}$, que acepta los exponentes tanto negativos como fraccionarios.

Como ejercicio, despejaremos la tasa de rendimiento de la siguiente ecuación:

$$\left(1 + \frac{R}{4}\right)^4 = 1.5$$

$$\left[\left(1+\frac{R}{4}\right)^4\right]^{1/4} = 1.5^{1/4}$$ Elevamos ambos lados a la potencia de ¼

$$1+\frac{R}{4} = 1.5^{1/4}$$ La regla de potencia de una potencia

$$\frac{R}{4} = 1.5^{1/4} - 1$$ Restamos 1 de ambos lados

$$R = 4\left(1.5^{1/4} - 1\right) = 0.4267 = 42.67\%$$ Multiplicamos ambos lados por 4.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Despejar *R* de la siguiente ecuación: $85 = \dfrac{100}{(1+R)^5}$

Respuesta: 0.0330.

PROMEDIO GEOMÉTRICO

Todos saben qué es la media aritmética. Sin embargo, no todos saben que en algunas circunstancias esta media no es aplicable.

EJEMPLO 1

Hace 5 años compramos una acción a $100. El valor de la acción crecía cada año en los siguientes porcentajes: 1, 24, 3, 10 y 2. ¿Cuál es el valor actual de la acción?

Solución: Una manera **incorrecta** de resolver este problema es calcular la tasa promedio de crecimiento (media aritmética) y después aplicar la fórmula para el crecimiento.

$$\text{Tasa promedio de crecimiento} = \frac{1\% + 24\% + 3\% + 10\% + 2\%}{5} = 8\% = 0.08$$

Nuevo valor de la acción $= 100(1.08)^5 = 146.93$

Esta respuesta es incorrecta. En realidad, el valor de nuestra acción creció en el primer año 1%, convirtiéndose en 101, en el segundo año creció 24%, convirtiéndose en $101(1.24) = 125.24$, etcétera.

El nuevo valor de la acción es $100(1.01)(1.24)(1.03)(1.1)(1.02) = 144.73$.

Esto quiere decir que el uso de la media aritmética para calcular la tasa de crecimiento promedio exagera el crecimiento. El método correcto es calcular la *media geométrica*, que es la raíz *n*-ésima del producto de *n* elementos, cada uno de los cuales es 1 más la tasa de crecimiento.

En nuestro ejemplo, si R es la tasa promedio de crecimiento, calculamos su valor de la siguiente ecuación:

$$(1 + R)^5 = (1.01)(1.24)(1.03)(1.1)(1.02), \qquad \text{de donde,}$$

$$R = \left[(1.01)(1.24)(1.03)(1.1)(1.02)\right]^{1/5} - 1 = 1.4473^{0.2} - 1 = 0.0767 = 7.67\%$$

Respuesta: Durante los últimos 5 años el valor de la acción estaba creciendo a un ritmo anual de 7.67% (y no 8%, como erróneamente indica el cálculo de la media aritmética).

Comprobación: $(1+ 0.0767)^5 = 1.4473$

En general, si una cantidad crece a un ritmo anual r_i ($i = 1, 2,..., n$), la tasa de crecimiento promedio r, calculada como un promedio geométrico, es:

$$(1 + r)^n = (1 + r_1)(1 + r_2)\cdots(1 + r_n)$$

$$1 + r = \left[(1 + r_1)(1 + r_2)\cdots(1 + r_n)\right]^{1/n}$$

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Las tasas de inflación mensual en los primeros 4 meses del año son: 3.8%, 2.4%, 1.5%, 0.9%. Calcule: *a*) la inflación acumulada en los 4 meses, *b*) la inflación promedio mensual como media aritmética, *c*) la inflación mensual promedio como media geométrica.

Respuesta: *a*) 8.86%, *b*) 2.15%, *c*) 2.14%.

Reflexión sobre matemáticas financieras

En algunos casos, la media aritmética produce resultados contrarios a la intuición. Compramos una acción a \$100. Después de un año su valor crece a \$200, un crecimiento anual de 100%. Un año después el valor de la acción baja a \$100, un crecimiento de −50%. ¿Cuál fue el rendimiento promedio de la inversión en la acción?

a) Media aritmética: $R_A = \dfrac{100 + (-50)}{2} = 25\%$

b) Media geométrica: $R_G = \left[(1 + 1)(1 - 0.5)\right]^{1/2} - 1 = 0$

La media aritmética es un mal indicador del rendimiento histórico. En nuestro ejemplo está claro que no ganamos nada (tasa de crecimiento de la inversión igual a cero), sin embargo, la media aritmética es de 25%.

FUNCIONES EXPONENCIALES

Una función es *exponencial* si la variable independiente aparece en el exponente de alguna base. El caso más sencillo es: $y(t) = b^t$, donde b es una base. Normalmente se restringe la base a valores mayores de 1 ($b > 1$). Esto se debe a las siguientes consideraciones:

- La base no puede ser negativa, porque si el exponente tomara valores fraccionarios tendríamos raíces de números negativos. Para trabajar con tales raíces es necesario introducir el concepto de *números imaginarios*.
- Si $0 < b < 1$, entonces la función exponencial es simplemente un reflejo de la función con base mayor que uno, siendo 0y el eje de reflexión. Por ejemplo, si $b = \frac{1}{2}$

$$y = b^t = \left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{2^t} = 2^{-t}$$

  El valor de esta función en $t = -2$ es igual al valor de $y = 2^t$ en $t = 2$.
- Por otro lado, si $b = 1$, la función exponencial se degenera en una función constante: $y = (1)^t = 1 =$ constante.

El rango de la función exponencial abarca todos los números positivos. Cualquier número positivo puede ser potencia de una base mayor que 1. El mismo número puede presentarse como potencia de diferentes bases.

Por ejemplo: $16 = 16^1 = 4^2 = 2^4$

Cuando la base de la función exponencial es mayor que 1, dicha función representa el proceso de crecimiento exponencial. La tasa de crecimiento es la base menos uno. La expresión $V = 100(1.15)^t$ representa el proceso de crecimiento, empezando en el nivel 100 y con la tasa de 15% por periodo. Como se puede apreciar en la gráfica, el nivel inicial está en la *intersección vertical*: el nivel de V, cuando $t = 0$. La tasa de crecimiento se refleja en la pendiente que se muestra en la figura 2.1.

El crecimiento exponencial discreto está plasmado en la siguiente fórmula:

$$\boxed{V_t = V_0 \left(1 + R\right)^t}$$

Donde:

V_0 es el valor inicial (intersección vertical en la gráfica),

V_t es el valor para cada nivel de t (altura de la gráfica),

R es la tasa de crecimiento por periodo,

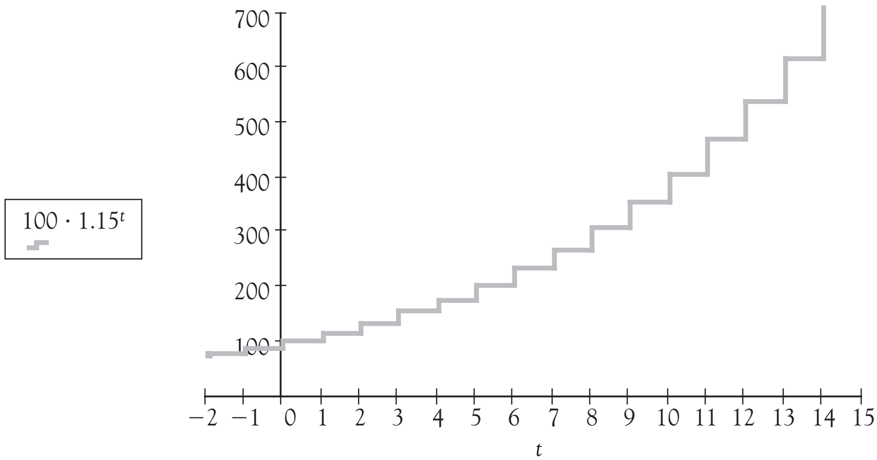
$(1 + R)$ es la base de la función exponencial,

t es el número de periodos

El crecimiento ocurre al final de cada periodo. Si las unidades en las que se mide el tiempo son grandes, la función adquiere forma de una escalera cuyos escalones son cada vez más altos.

Figura 2.1

Función
$V = 100(1.15)^t$



EJEMPLO 1

Las ventas de una empresa son de $120 millones anuales. El plan de expansión prevé que las ventas aumentarán a un ritmo de 20% anual durante los próximos 5 años. Si se cumpliera el plan de expansión, ¿cuáles serían las ventas de la empresa en 5 años?

$$V_0 = 120, R = 20\%, t = 5$$

Solución: Sustituimos los datos del problema en la fórmula del crecimiento exponencial.

$$V_5 = 120(1.2)^5 = 298.6$$

Respuesta: En 5 años las ventas anuales de la empresa serán de $298.6 millones.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

La inflación en mayo de 1999 fue de 0.6%. ¿Cuál sería la inflación anual si el ritmo de inflación de mayo se mantuviera todo el año?

Respuesta: 7.44%.

Función exponencial natural

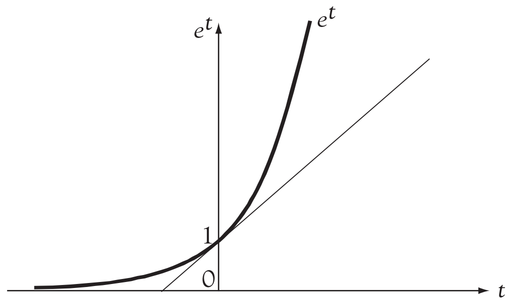
No da lo mismo elegir cualquier número (> 1) como base de la función exponencial, pues algunas bases son más cómodas que otras. La más cómoda es el número irracional $e = 2.7282...$[1] La función exponencial con base e suele llamarse *función exponencial natural*:

$$y(t) = e^t \equiv \exp(t)$$

[1] Se usa la letra e en honor del gran matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783).

Figura 2.2

Función exponencial natural, $y = e^t$



La forma generalizada de la función exponencial natural, desde el nivel inicial A, con la tasa de crecimiento R, es:

$$y = Ae^{rt} \equiv A \exp(rt)$$

En la gráfica podemos observar dos características principales de la función exponencial:

1. En la medida en que crece la variable independiente, el valor de la función exponencial natural crece muy rápidamente.
2. Cuando el valor de la variable independiente es cero, la pendiente de la función exponencial natural es igual a 1 (45°).

Para ilustrar la *primera propiedad* invitamos al lector a que calcule para qué valor de t la función e^t llega a un millón (la respuesta es 13.8155).

La principal ventaja de la función exponencial natural es que ésta es su propia derivada:

$$\frac{d}{dt}e^t = e^t, \qquad \frac{d^2}{dt^2}e^t = e^t, \text{ etc.}$$

Si evaluamos el valor de la derivada de la función exponencial natural en el punto cero, tenemos:

$$\frac{de^t}{dt} = e^t\Big|_{t=0} = e^0 = 1$$

Esto ilustra la *segunda propiedad* de la gráfica de la función exponencial natural.

Matemáticamente, e se define como un límite, o mediante un área por debajo de la hipérbola equilátera. Como límite:

$$e \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Esta definición de e tiene una interpretación económica interesante. Supongamos que depositamos en el banco un peso y el banco nos paga la tasa de interés de 100% anual. Si el interés compuesto se calcula una vez al año, al cabo de este periodo nuestro capital se habrá convertido en 2 pesos.

$$V(1) = 1(1 + 100\%) = 1\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \qquad (100\% \text{ equivale a } 1)$$

donde:

$V(1)$ es el valor de capital si la tasa de interés de 100% se capitaliza una vez al año.

Si el interés se calcula 2 veces al año, después de 6 meses nuestro capital es multiplicado por $1 + 50\% = 1 + \frac{1}{2}$ y al fin del año otra vez por el mismo factor.

$$V(2) = 1(1+50\%)(1+50\%) = 1\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{2}\right) = 1\left(1+\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2.25$$

Si el número de capitalizaciones en el año aumenta a n, al cabo de un año nuestro capital se habrá convertido en:

$$V(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Por ejemplo, si $n + 12$ (capitalización mensual): $V(12) = \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2.61$

Con una capitalización diaria ($n = 365$): $V(365) = \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2.7146$

Finalmente, cuando la capitalización se vuelve continua, es decir, cuando el número de veces que se calcula el interés compuesto se aproxima al infinito, nuestro capital se convierte en:

$$\lim_{n\to\infty} V(n) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\ldots$$

En resumen: e puede interpretarse como el valor que al cabo de un año adquiere 1 peso, si la tasa anual de interés de 100% se capitaliza continuamente.

En este caso, la tasa nominal de 100% se convierte en una tasa efectiva de:

$$e - 1 \cong 171.82\%$$

En la práctica, podemos evaluar el valor de e con cualquier grado de exactitud, con una expansión de Taylor de la función exponencial natural:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Es muy fácil generalizar la capitalización continua al caso en que el capital inicial es igual a V_0 y la tasa de interés nominal igual a R. La fórmula generalizada de la capitalización continua es:

$$\boxed{V_t = V_0 e^{Rt}}$$

Esta fórmula también representa el *crecimiento exponencial continuo* con el nivel inicial V_0 y la tasa de crecimiento R.

Para evitar confusión, es necesario tener presente la diferencia que hay entre las *funciones exponenciales* y las *funciones potenciales*.

La diferencia radica en el lugar en que está la variable:

$y = x^{10}$ es una *función potencial* (la variable está en la base)

$y = 10^x$ es una *función exponencial* (la variable está en el exponente)

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

¿Cuál será el saldo de una cuenta bancaria de $120 mil después de 3 años y medio, si el rendimiento de la cuenta es de 18%, capitalizado continuamente?

Respuesta: $225 313.27.

LOGARITMOS

El logaritmo de un número x con base b es el número al que hay que elevar la base para obtener el número x.

$$\log_b x = y \;\Rightarrow\; b^y = x$$

EJEMPLO 1

$\log_3 9 = 2$	ya que	$3^2 = 9$
$\log_{10} 1000 = 3$	ya que	$10^3 = 1000$
$\log_{10} 0.001 = -3$	ya que	$10^{-3} = 0.001$
$\log_e 1 = 0$	ya que	$e^0 = 1$

En realidad, sólo dos números se utilizan como base de logaritmos.

Los *logaritmos comunes* (*log*) tienen como base el 10 y los *logaritmos naturales* (*ln*) tienen como base el número $e = 2.7183\ldots$

$$\log x \equiv \log_{10} x \qquad \text{y} \qquad \ln x \equiv \log_e x$$

Con la generalización de las calculadoras electrónicas los logaritmos comunes cayeron en desuso y los únicos logaritmos que se utilizan actualmente son los logaritmos naturales. Así, en la mayoría de los libros de matemáticas el símbolo *log* significa en realidad el logaritmo natural.

De la definición de logaritmo es fácil derivar su propiedad más importante, conocida como *ecuación funcional*:

$$\boxed{\log(xy) = \log x + \log y}$$

Una variante de la ecuación funcional es la regla para el logaritmo del cociente.

$$\boxed{\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y}$$

La ecuación funcional tiene las siguientes consecuencias:

$$\log\frac{1}{x} = \log 1 - \log x = 0 - \log x = -\log x, \qquad \text{y}$$

$$\log x^n = \log \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ veces}} = \overbrace{\log x + \log x + \cdots + \log x}^{n \text{ veces}} = n \log x$$

$$\boxed{\log\frac{1}{x} = -\log x \qquad \log x^n = n \log x}$$

EJEMPLO 2

$$\log\left[\frac{a(1+R)^5}{4}\right] = \log a + 5 \log(1 + R) - \log 4$$

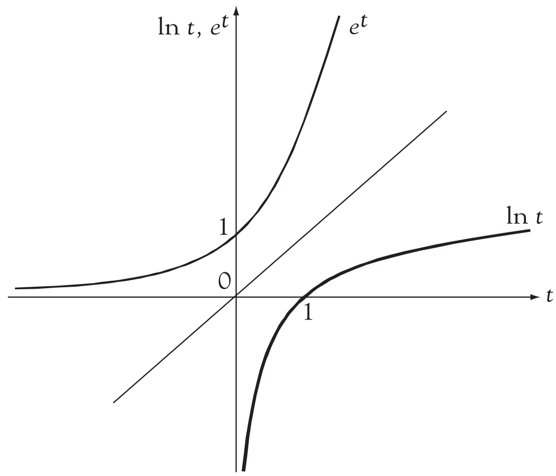


Figura 2.3

Función logarítmica.

Cuando x crece, $\log x$ crece también, pero a un ritmo decreciente:

$$\lim_{x\to\infty} \log x = +\infty$$

Cuando x se acerca a 0, $\log x$ adquiere valores negativos muy grandes:

$$\lim_{x\to 0} \log x = -\infty$$

La gráfica de la función $y = \log x$ es un reflejo de la función exponencial respecto a la línea de 45° ($y = x$) (véase figura 2.3).

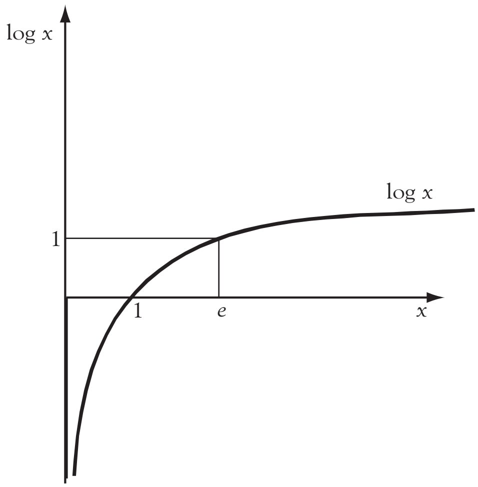
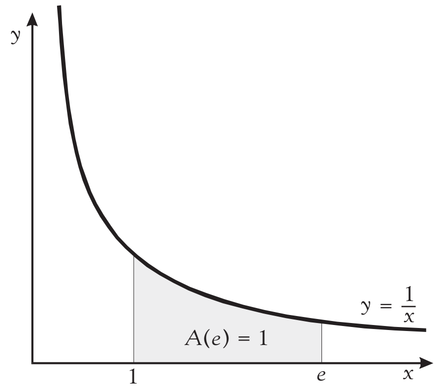
Como se puede apreciar en la figura 2.3, la función logarítmica tiene tres propiedades:

1. Crece muy lentamente: $\ln(1\,000\,000) = 13.81$.
2. Es positiva para $t > 1$, y negativa para $t < 1$.
3. Cuando $t = 1$, el valor de la función logarítmica es 0 y la pendiente de la gráfica de la función es igual a 1.

$$y(0) = \ln t\big|_{t=1} = 0 \qquad \text{dado que} \qquad e^0 = 1$$

$$\frac{d \ln t}{dt} = \frac{1}{t}\bigg|_{t=1} = 1$$

El número cuyo logaritmo natural es igual a 1 se define como e: $\log e = 1$.

<table>
<tr><td>$\log e = 1$</td><td>El área por debajo de la hipérbola equilátera de 1 a e es igual a 1</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Esta definición nos proporciona una interpretación alternativa de e:

e es el número para el cual el área por debajo de la hipérbola equilátera $y = 1/x$ es igual a 1.

$$A(e) \equiv \int_1^e \frac{dx}{x} = 1$$

Recordemos que otra definición de e es un límite:

$$e \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Según la definición del logaritmo:

$$y = \log x \equiv \log_e x \iff x = e^y = e^{\log x}$$

Como regla mnemotécnica podemos recordar que los operadores de las funciones logarítmica (log) y exponencial (e) se anulan mutuamente.

$$\text{Si } y = e^x \text{ entonces } \log y = \log e^x = x \log e = x$$

$$\boxed{e^{\log x} = x \quad \text{y} \quad \log e^x = x}$$

El hecho de que $y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$ implica que las funciones exponencial y logarítmica son **inversas**.

Los logaritmos permiten convertir cualquier función exponencial con $b > 1$ en una función exponencial natural.

Sea $y = b^t$ donde $b > 1$

$$\log y = \log b^t = t \log b \;\Rightarrow\; y = e^{t \log b}$$

$$\boxed{b^t = e^{t \log b}}$$

El uso de logaritmos es indispensable si queremos despejar el exponente de una expresión.

EJEMPLO 3

Si la tasa de interés es de 7% anual, ¿en cuántos años se duplicará el capital?

$$1.07^t = 2$$

$t \log 1.07 = \log 2$	el logaritmo de una potencia
$t = \dfrac{\log 2}{\log 1.07} = \dfrac{0.6931}{0.0677} = 10.24$	despejamos t y calculamos su valor

Respuesta: El capital se duplicará en 10.24 años.

También pueden utilizarse los logaritmos para despejar la tasa de interés de una expresión, pero este procedimiento no es eficiente. Es preferible usar los exponentes fraccionarios.

EJEMPLO 4

¿Qué tasa de interés hace que el capital se duplique en 5 años?

Solución: La ecuación correspondiente es:

$$(1 + R)^5 = 2$$

$5 \log(1 + R) = \log 2$	sacamos logaritmos de ambos lados
$\log (1 + R) = (\log 2)/5 = 0.1386$	dividimos entre 5
$1 + R = e^{0.1386} = 1.1487$	sacamos el antilogaritmo
$R = 0.1487 = 14.87\%$	restamos 1 de ambos lados

Respuesta: El capital se duplica en 5 años si la tasa de interés es de 14.87%.

Sin duda el lector se dio cuenta de la ineficiencia del procedimiento anterior. El método eficiente consiste en sacar la raíz del grado quinto de la ecuación y restar 1 de ambos lados de la misma.

$$(1 + R)^5 = 2$$

$$\left[(1+R)^5\right]^{1/5} = 2^{1/5} = \sqrt[5]{2}$$

$$1 + R = 2^{1/5} = 1.1487$$

$$R = 0.1487 = 14.87\%$$

Como podemos observar, la respuesta es la misma, pero el número de pasos necesarios para obtenerla es mucho menor.

En la solución del ejemplo 4 usamos la palabra *antilogaritmo*.

Si $y = \log x$, x es el antilogaritmo de y

En el caso de logaritmos naturales, para calcular el antilogaritmo se utiliza la tecla $\boxed{e^x}$ de la calculadora o la tecla $\boxed{\text{EXP}}$. En el caso de los logaritmos comunes se utiliza la tecla $\boxed{10^x}$.

$$y = \ln x = \log_e x \quad \Rightarrow \quad x = e^y$$
$$y = \log_{10} x \quad \Rightarrow \quad x = 10^y$$

Dado que las funciones logarítmicas y las exponenciales son inversas, el antilogaritmo no es otra cosa que una función exponencial, es decir, una función en la cual la variable viene en el exponente.

PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Una *sucesión* es una lista ordenada de números. Por ejemplo,

$$10, 12, 14, 16, 18,\ldots$$

es una sucesión. El primer término es 10, y cada siguiente término se obtiene sumando 2 al término anterior. Si el número de términos es finito, la sucesión se llama *finita*. Si no hay un último término, la sucesión se llama *infinita*.

Una sucesión en la cual cada término difiere del anterior en una cantidad fija se denomina *progresión aritmética*. La *diferencia común* entre los dos números sucesivos se denota por d. El primer término se denota como a.

Así, los primeros términos de una progresión aritmética son

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$$

Observando esta progresión, podemos escribir la fórmula para su n-ésimo término:

$$a_n = a + (n - 1)d$$

Si la progresión es finita y el número de términos es n, la fórmula para el último término, que denotamos por u, es:

$$\boxed{u = a + (n - 1)d}$$

EJEMPLO 1

Dada la sucesión 2, 5, 8, 11,…, calcule su décimo término.

Solución: El primer término es 2, y la diferencia común es 3: $a = 2$, $d = 3$. Sustituyendo estos datos en la fórmula del n-ésimo término de una sucesión, tenemos:

$$a_{10} = 2 + (10 - 1)3 = 29$$

Respuesta: El décimo término de la sucesión es 29.

EJEMPLO 2

El capital inicial es de \$80 000 y crece \$2 000 cada mes. Calcule el monto del capital después de 12 meses.

Solución:

$$a = 80000,\ d = 2000,\ n = 12.$$

Sustituyendo estos datos en la fórmula para el último término, tenemos:

$$u = 80000 + (12 - 1)2000 = 102000$$

Respuesta: Después de 12 meses el saldo es de \$102 000.

EJEMPLO 3

Una máquina cuesta \$110 000. Cada año, la empresa deprecia la máquina en \$15 000 y su valor de rescate es de \$35 000. ¿Cuál es la vida útil de la máquina?

Solución:

$$d = -15\,000,\ u = 35\,000,\ n = ?$$

El primer término de la sucesión es el valor de la máquina después del primer año, esto es, el valor original menos la primera depreciación:

$$a = 110\,000 - 15\,000 = 95\,000$$

Ahora ya podemos despejar n de la fórmula para el último término de la sucesión:

$$35\,000 = 95\,000 + (n - 1)(-15\,000)$$

$$n = 5$$

Respuesta: La vida útil de la máquina es de 5 años.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Calcule el octavo término de la progresión aritmética que empieza en 15 con la diferencia común de 4.

Respuesta: 43.

Suma de *n* términos de la progresión aritmética

Para sumar los n términos de una progresión aritmética, primero escribimos la suma en el orden normal y después la escribimos en el orden inverso. Al sumar las dos expresiones obtenemos el resultado.

EJEMPLO 4

Sumar los números de 1 a 10. Aquí $a = 1$, $d = 1$, $n = 10$

Solución: Denotamos la suma como S

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9 + 10$$

$$S = 10 + 9 + 8 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

Sumando ambas expresiones, tenemos:

$$2S = \underbrace{11 + 11 + 11 + \cdots + 11 + 11 + 11}_{n \text{ veces}}$$

$$2S = 10(11) = 110$$

$$S = 55$$

Respuesta: La suma de los números de 1 a 10 es 55.

Para obtener una fórmula general para los n términos de una progresión aritmética, utilizamos el mismo procedimiento pero con los términos generales:

$$S = a + (a + d) + \ldots + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 1)d]$$

$$S = [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + \ldots + (a + d) + a$$

Sumando estas expresiones, tenemos:

$$2S = \underbrace{\left[2a + (n-1)d\right] + \left[2a + (n-1)d\right] + \cdots + \left[2a + (n-1)d\right] + \left[2a + (n-1)d\right]}_{n \text{ veces}}$$

$$2S = n[2a + (n - 1)d]$$

Despejando S, obtenemos la fórmula para la *suma de los n términos de una progresión aritmética*, con el primer término a, y con la diferencia d.

$$\boxed{S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]}$$

El fácil observar que la expresión entre corchetes es la suma del primero y del último términos. Así, la fórmula también puede ser escrita como:

$$\boxed{S = \frac{n}{2}\left[a + u\right]}$$

EJEMPLO 5

Calcule el último término y la suma de una progresión aritmética de 20 términos que empieza en 100 y cada término es mayor que el anterior en 7.

Solución: El último término: $u = 100 + 19(7) = 233$

La suma: $S_{20} = \frac{20}{2}(100 + 233) = 3\,330$

Respuesta: La suma de la progresión es de 3 330.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Calcule *a*) la suma de todos los números impares entre 1 y 50, *b*) la suma de todos los números pares entre 1 y 50 (tanto 1 como 50 entran en estas sumas).

Respuesta: *a*) 625, *b*) 650.

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Una sucesión en la cual la razón entre un término y el anterior es constante se llama *progresión geométrica*. Si a es el primer término y r es la *razón común*, la progresión geométrica tiene la siguiente forma:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

Es fácil comprobar que la razón entre dos términos sucesivos es igual a r.

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{ar}{a} = r, \qquad \frac{a_t}{a_{t-1}} = \frac{ar^{t-1}}{ar^{t-2}} = r$$

El último término de la progresión geométrica finita con n términos, es:

$$\boxed{u = ar^{n-1}}$$

EJEMPLO 1

Un depósito de \$1 000 produce 10% anual, que se calcula sobre el saldo del periodo inmediatamente anterior. Calcule el saldo después de 5 años.

Solución: Si el depósito crece a un ritmo de 10% anual, al final del primer año es 1 000 + 10% = 1 100, al final del segundo es 1 100 + 10% = 1 210, etc. Se trata claramente de una progresión geométrica en la cual el primer término, a = 1 100, la razón común, r = 1.1, y el número de periodos, n = 5. Sustituyendo estos datos en la fórmula para el último término de la progresión, tenemos:

$$u = 1\,100(1.1)^4 = 1\,610.51$$

Respuesta: El saldo en el quinto año es de \$1 610.51.

Si la razón común de una progresión geométrica es mayor que 1, la progresión es creciente. El ejemplo 1 es una ilustración de una progresión creciente. Si $r < 1$, la progresión es decreciente.

EJEMPLO 2

Una máquina que vale \$100 000 se deprecia cada año 20% de su valor. ¿Cuál es el valor de rescate, si la vida útil de la máquina es de 6 años?

Solución: Al final del primer año, el valor de la máquina es 100 000 − 20% = 80 000, al final del segundo año es 80 000 − 20% = 64 000, etc. Se trata de una progresión geométrica en la cual el primer término, a = 80 000, la razón común, r = 0.8, y el número de periodos, n = 6. Sustituyendo estos datos en la fórmula para el último término de la progresión, tenemos:

$$u = 80\,000(0.8)^5 = 26\,214.40$$

Respuesta: El valor de rescate de la máquina es de \$26 214.40.

EJEMPLO 3

El primer término de una progresión geométrica es 10, la razón común es 3 y el último término es 7290. ¿Cuántos términos tiene la progresión?

$$a = 10, r = 3, u = 7290, n = ?$$

Solución: Despejamos n de la fórmula del último término:

$$7\,290 = 10(3)^{n-1}$$

$$(n - 1)\ln 3 = \ln(729)$$

$$n - 1 = \frac{\ln 729}{\ln 3} = 6$$

$$n = 7$$

Respuesta: La progresión tiene 7 términos.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Cada dosis de una medicina mata 50% de los microbios en el cuerpo. ¿Cuántas dosis deben tomarse para eliminar 99% de los microbios?

Respuesta: 7 (respuesta exacta 6.64).

Suma de *n* términos de una progresión geométrica

Para sumar los n términos de una progresión geométrica escribimos la suma y después la multiplicamos por la razón común, r. Al restar la segunda suma de la primera obtenemos el resultado buscado. Sea S_n la suma de n términos.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

Restando la segunda ecuación de la primera, observamos que en el lado derecho se cancelan todos los términos, menos el primero y el último. Esta propiedad de las series geométricas se llama *propiedad telescópica.*

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

Factorizando y despejando S_n, obtenemos la fórmula para la *suma de n términos de una progresión geométrica.*

$$\boxed{S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}}$$

Esta fórmula es útil cuando la progresión es decreciente: $r < 1$.

En el caso de una progresión creciente, $r > 1$, es mejor utilizar la fórmula alternativa, que se obtiene multiplicando el numerador y el denominador de la fórmula anterior por -1.

$$\boxed{S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1}}$$

EJEMPLO 4

Si al final de cada mes se depositan $1 000 en una cuenta que rinde 2% mensual, ¿cuál será el saldo de la cuenta al final del doceavo mes?

$$a = 1\,000,\ r = 1.02,\ n = 12$$

Solución: Se trata de sumar la serie finita $1\,000 + 1\,000(1.02) + \ldots + 1\,000(1.02)^{11}$. Sustituyendo los datos del problema en la fórmula para la suma, tenemos:

$$S_{12} = \frac{1\,000\left(1.02^{12} - 1\right)}{1.02 - 1} = 13\,412.09$$

Respuesta: Después de 12 meses el saldo de la cuenta será de $13 412.09.

De esta cantidad, $12 000 son los depósitos y $14 512.09 los intereses ganados sobre los saldos.

Por razones obvias, resulta imposible sumar los términos de una progresión geométrica infinita creciente. Sin embargo, cuando la progresión geométrica infinita es decreciente, sus términos se pueden sumar buscando el límite de la suma de la progresión finita.

Si $-1 < r < 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} r^n = 0$, entonces,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

La fórmula para la suma de la *progresión geométrica infinita decreciente* es:

$$\boxed{S = \frac{a}{1 - r}}$$

EJEMPLO 5

Calcule la suma de la sucesión infinita: $1 + 0.8 + 0.64 + 0.512 + \ldots$

$$a = 1,\ r = 0.8,\ n = \infty$$

Solución: Sustituyendo los datos en la fórmula, tenemos:

$$S = \frac{1}{1 - 0.8} = \frac{1}{0.2} = 5$$

Respuesta: La progresión infinita que empieza en 1 y tiene la razón de 0.8 se suma a 5.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Si gastamos 1 peso, la persona que lo recibe ahorra en promedio 20% y gasta el restante 80%. ¿Cuál es el gasto total generado por nuestro desembolso inicial de 1 peso?

Respuesta: \$5.

FÓRMULAS DEL CAPÍTULO

Promedio geométrico $r = [(1 + r_1)(1 + r_2)\cdots(1 + r_n)]^{1/n} - 1$	Último término de la progresión aritmética $u = a + (n - 1)d$
Crecimiento exponencial discreto $V_t = V_0(1 + R)^t$	Suma de la progresión aritmética $S = \frac{n}{2}[a + u]$
Crecimiento exponencial continuo $V_t = V_0 e^{Rt}$	Último término de la progresión geométrica $u = ar^{n-1}$
Número e $e \equiv \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^r$	Suma de la progresión geométrica $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}; \quad r < 1$
Suma de la progresión geométrica infinita decreciente $S = \frac{a}{1 - r}$	Suma de la progresión geométrica $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}; r > 1$

Términos clave

Antilogaritmos
Crecimiento exponencial continuo
Crecimiento exponencial discreto
Ecuación
Funciones exponenciales
Función exponencial natural
Leyes de exponentes
Logaritmos comunes
Logaritmos naturales
Progresión aritmética
Progresión geométrica
Progresión geométrica decreciente infinita
Promedio geométrico
Puntos base
Puntos porcentuales
Sucesión

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Resuelva las siguientes ecuaciones respecto a x:

   a) $2x + 5 = 3y - 12$, *b*) $\dfrac{x+2}{4y-8} = 3$, *c*) $(1+x)^4 = (1+y^3)^2$

2. Evalúe las siguientes expresiones:

   a) $x^3 = \dfrac{12-\sqrt{9}}{2^3+4^2}$, *b*) $\dfrac{x+2}{8} = \left(3-\sqrt{2}\right)^3$, *c*) $x^{\frac{1}{4}} = \dfrac{2^{-3} + \frac{7}{8} + 15}{3^3 - 4^2}$

3. El índice de precios y cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores subió de 3 850 a 4 292. ¿En qué porcentaje subió el índice?

4. Sabemos que ayer el IPC era de 4 248 y nos enteramos de que durante la jornada el índice subió en 1.24%. ¿Cuál es el nuevo nivel del IPC?

5. El IPC termina la jornada al nivel de 4 423. Durante la jornada el índice bajó 0.57%. ¿Cuál fue el nivel de IPC al inicio de la jornada?

6. Durante los últimos 5 años, el PIB de México tuvo las siguientes tasas de crecimiento: 3.5%, −6.4%, 5.2%, 7%, 4.8%.

   a) Calcule la tasa de crecimiento como un promedio aritmético.

   b) Calcule la tasa de crecimiento anual como un promedio geométrico.

   c) ¿Qué método refleja mejor la realidad?

7. Durante el año el valor del dólar subió de $9 a $9.7.

   a) Calcule el porcentaje en que subió el valor del dólar.

   b) Calcule el porcentaje en que bajó el valor del peso.

8. Hace 4 años ganaba $4 500 al mes. Durante estos cuatro años los precios subieron en 150%. Calcule el valor de su sueldo de hace 4 años en pesos de hoy.

9. Calcule el valor de x en las siguientes ecuaciones:

   a) $e^x = 4$, *b*) $\ln x = 3$, *c*) $e^{ex} = 40$, *d*) $\log_{10} x = 2$, *e*) $3^x = 50$

10. Evalúe las expresiones:

    a) $e^{3 \ln 2}$, *b*) $\log_{10}20 + \log_{10}5$, *c*) $\log_{10}500 - \log_{10}5$, *d*) $\ln e^5$

11. ¿En cuánto tiempo se duplica una cuenta que rinde 24% compuesto mensualmente?

12. ¿En cuánto tiempo se triplica una cantidad, si la tasa de 18.31% se compone continuamente?

13. La población se duplica cada 25 años. Calcule:

    a) la tasa de crecimiento discreta, *b*) la tasa de crecimiento continua.

14. Si la población inicial de 10 millones se duplica cada 25 años, ¿cuál será la población después de 200 años?

15. ¿Qué significa que x es un antilogaritmo de y?

16. Calcule el vigésimo término de la serie que empieza así:

$$20, 27, 34, \ldots$$

17. ¿Cuántos términos tiene una progresión aritmética que empieza en 30, termina en 156 y avanza de a 7?

18. Calcule la diferencia común de una progresión aritmética de 10 términos, cuyo primer término es 100 y el último 235.

19. Calcule la siguiente suma: $25 + 30 + 35 + \cdots + 250$

20. Calcule el décimo término de la progresión: 100, 120, 144,…

21. Calcule el octavo término de la progresión: 10, 20, 40,…

22. ¿Cuántos términos tiene una progresión geométrica que empieza en 500, tiene la razón de 1.3 y termina en 73 096 145?

23. ¿Cuál es la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 80 y el vigésimo quinto término es 2 062.63?

24. Al final de cada mes usted deposita $1 000 en una cuenta de ahorro que produce un rendimiento mensual de 3%. ¿Cuál será el saldo de su cuenta después de 40 meses?

25. ¿Cuánto tendría que depositar en la cuenta del problema anterior para reunir después de 40 meses una cantidad de $100 000.

CAPÍTULO 3

Interés simple

Objetivos del aprendizaje

Después de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

- Calcular el interés sobre el principal.
- Calcular la tasa de interés con base en el valor inicial y el valor terminal.
- Distinguir entre el interés simple y el interés compuesto.
- Desarrollar la fórmula para el valor futuro con el interés simple.
- Dibujar un diagrama de flujo de caja.
- Ajustar la tasa de interés a las unidades en las que se mide el tiempo.
- Ajustar el tiempo al periodo de la tasa de interés.
- Resolver cuatro tipos de problemas de interés simple: valor presente, valor futuro, tasa de interés y plazo.
- Aplicar el descuento bancario.
- Convertir la tasa de descuento en la tasa de interés, y viceversa.

Este capítulo está dedicado a la introducción de la terminología, los símbolos y los conceptos fundamentales. Veremos cómo se calculan el interés y la tasa de interés, el valor futuro y el valor presente con el interés simple, el valor presente con el descuento bancario, cuál es el rasgo fundamental del interés simple, y cómo se transforma la tasa de descuento en la de rendimiento, y viceversa.

CONCEPTOS BÁSICOS

En primer lugar, vamos a introducir los símbolos que utilizaremos en el resto del texto. Los lectores acostumbrados a otra simbología pueden seguir usándola.

P_0 valor del principal en el momento 0. Es el valor inicial de la transacción, el capital inicial. Los símbolos alternativos son: *VP* (valor presente) o *VA* (valor actual)

n número de periodos, el tiempo o plazo. Alternativamente T

t número del periodo

P_N monto (capital más intereses) en el momento n. Es el valor terminal de la transacción. Alternativamente P_t o *VF* (valor futuro)

R tasa de interés nominal[1]

El interés es el pago por el uso del dinero. Si un deudor recibe \$100 ahora y en un año tiene que devolver \$125, el interés es \$25: el valor terminal menos el valor inicial.

$$\text{Interés} = \text{valor terminal} - \text{valor inicial}$$

$$\text{Interés} = P_1 - P_0 = \Delta P \qquad \text{es el incremento del valor inicial}$$

La tasa de interés (R) es el interés por cada peso del valor inicial:

$$R = \frac{\text{Interés}}{\text{Valor inicial}} = \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{\Delta P}{P_0} = \%\Delta P$$

$\%\Delta P$, o sea, el cambio porcentual de P, es la tasa de crecimiento de P, forma en que se constata que la tasa de interés es la tasa de crecimiento del principal.

De la ecuación se desprende que el interés es el principal multiplicado por la tasa de interés:

$$\text{Interés} = \text{principal} \times \text{tasa de interés}$$

$$\text{Interés} = P_1 - P_0 = P_0 \times R$$

[1] En muchos textos la tasa de interés se presenta como ***i***; nosotros reservamos esta letra para designar la inflación.

En el interés simple, el interés se calcula siempre con base en el valor inicial. Así, en cada periodo, el interés es igual al principal multiplicado por la tasa de interés:

$$\text{Interés} = P_0 R \qquad \text{(en cada periodo)}$$

Para calcular el interés acumulado en varios periodos simplemente se suman los intereses de cada periodo. Así, con el método del interés simple, el interés acumulado después de varios periodos es:

$$\begin{aligned}
&\text{Después de 1 periodo:} && P_0R \\
&\text{Después de 2 periodos:} && P_0R + P_0R = 2 \times P_0R \\
&\text{Después de } t \text{ periodos:} && \underbrace{P_0R + P_0R + \cdots + P_0R}_{t \text{ veces}} = t \times P_0R
\end{aligned}$$

Después de t periodos, el interés es la suma de los intereses ganados en cada uno de los periodos.

El valor futuro del principal es el valor inicial más el interés. Después de 1 periodo, el valor futuro es:

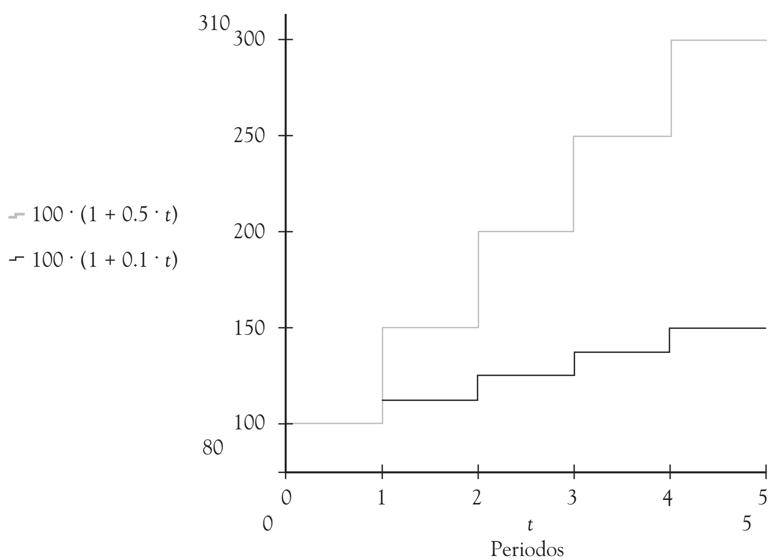
$$P_1 = P_0 + P_0 R = P_0 (1 + R)$$

Después de 2 periodos el valor futuro es:

$$P_2 = P_1 + P_0 R = P_0 + P_0 R + P_0 R = P_0 + 2P_0 R = P_0 (1 + 2R)$$

Figura 3.1

La gráfica del interés simple se parece a una escalera de escalones iguales. La altura de cada escalón representa el interés ganado en el periodo. A mayor tasa de interés, mayor la altura. En la curva de arriba, la tasa de interés es de 50% por periodo y en la de abajo de 10%.



Después de t periodos:

$$\boxed{P_t = P_0\,(1 + tR)}$$

Ésta es una fórmula general para el interés simple. En notación alternativa, la fórmula se escribe como:

$$VF = VP\,(1 + tR)$$

Si R es una tasa nominal anual y t es el número de días, la fórmula para el valor futuro con el interés simple se convierte en:

$$\boxed{VF = VP\left[1 + R\left(\frac{t}{360}\right)\right]}$$

EJEMPLO 1

López solicita a un banco un préstamo por $100 000 a 3 meses a interés simple, con la tasa mensual de 5%. ¿Cuánto tendrá que devolver al banco después de 3 meses?

$$P_0 = 100000, \qquad R = 5\% = 0.05, \qquad t = 3$$

Solución: El interés para el periodo de 3 meses es:

$$t\,P_0\,R = 3 \times 100000\,(0.05) = 15000$$

López tendrá que devolver el principal más el interés, esto es:

$$100000 + 15000 = 115000$$

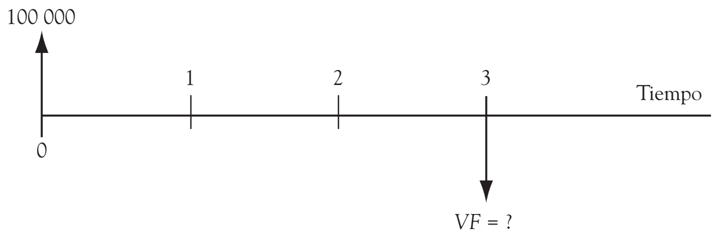
Otra manera de llegar a la misma solución es aplicando la fórmula:

$$P_t = P_0\,(1 + tR) = 100000[1 + 3(0.05)] = 115000$$

Respuesta: López tendrá que devolver $115 000. De esta cantidad, $100 000 representa el principal y $15 000 los intereses generados en tres meses. Si el interés mensual es de $5 000, el interés por 3 meses es $15 000.

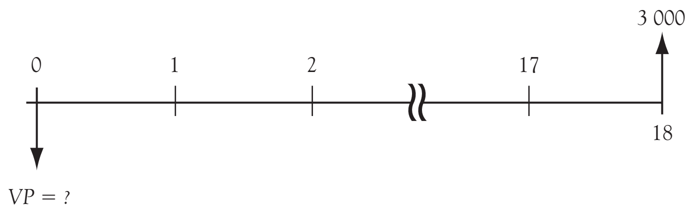
Diagrama de flujo de caja

Un instrumento fundamental de las matemáticas financieras es el diagrama de flujo de caja, conocido también como *diagrama de tiempo y valor*, o simplemente *línea de tiempo*. El diagrama de flujo de caja presenta los flujos de entrada y salida de efectivo en una escala de tiempo. Según la *convención del fin de periodo*, los flujos de caja ocurren al final de cada periodo de interés. La dirección de la flecha indica el tipo de flujo. La flecha hacia arriba representa la entrada de efectivo y hacia abajo señala la salida. El diagrama de flujo de caja representa el planteamiento del problema: lo que está dado y lo que se busca. Como ilustración, presentamos el diagrama de flujo del problema 1.



La flecha hacia arriba representa la entrada de efectivo (la contratación de deuda). La flecha hacia abajo señala la salida de efectivo: la devolución del principal junto con los intereses. El cálculo de esta cantidad es el objetivo del ejemplo 1.

Si hay muchos periodos, en el diagrama de flujo de caja se utiliza el recurso de marcar sólo los primeros y los últimos periodos. El signo de interrupción en la línea de tiempo indica que la línea es continua.



El tiempo se puede medir en días, meses, trimestres, semestres y años. Para facilitar y estandarizar los cálculos, en la gran mayoría de los casos se utiliza el *tiempo convencional* en vez del *tiempo exacto*. Así, un año tiene 360 días o 12 meses con 30 días cada uno. A veces se utiliza el tiempo exacto: un año de 365, o 366 días (en caso de un año bisiesto), un mes de 30 o 31 días, etc. A menos que se indique lo contrario, en este libro utilizaremos el tiempo convencional.

Algunas veces las unidades de tiempo en las que se mide el plazo no coinciden con las unidades que sirvieron de base para calcular la tasa de interés. En estos casos resulta necesario calcular el plazo en unidades de la tasa de interés, o ajustar la tasa de interés a las unidades en que se mide el plazo.

EJEMPLO 2

Una persona invierte $10 000 en un fondo de inversiones. El fondo garantiza un rendimiento mensual de 3%, calculado con el método del interés simple. Si la persona retira su depósito después de 20 días, ¿cuánto recibe?

$$P_0 = 10000, \qquad R = 3\% = 0.03, \qquad t = 20 \text{ días} = 20/30 = 0.67 \text{ meses}$$

Solución:

$$P_t = P_0\left(1 + tR\right) = 10000\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)0.03\right] = 10200$$

Respuesta: La persona recibirá $10 200, esto es, el principal más $200 de intereses. Si el interés mensual es $300, el interés por 20 días es $\frac{2}{3}$ de $300, o sea $200.

Para resolver el ejemplo 2 ajustamos las unidades en las cuales se mide el tiempo a las unidades en que está expresada la tasa de interés. Si la tasa de 3% es mensual, el periodo también tenemos que expresarlo en meses: 20 días son $\frac{2}{3}$ de un mes.

Una manera alternativa de enfocar este problema es ajustar la tasa de interés a las unidades en que medimos el tiempo. En el ejemplo 2 el tiempo lo medimos en días, consecuentemente también es necesario calcular la tasa de interés diaria. Si la tasa de interés es de 3% mensual, entonces la tasa diaria sería: 3%/30 = 0.1%. Ahora ya podemos usar la fórmula del interés simple, utilizando días como la unidad del tiempo.

$$P_t = P_0(1 + tR) = 10\,000\left[1 + 20 \times \frac{0.03}{30}\right] = 10\,200$$

La situación más frecuente es cuando la tasa de interés simple se da en términos anuales y el periodo se mide en días. En este caso la tasa anual la dividimos entre 360 y la multiplicamos por el número de días, n.

EJEMPLO 3

Un banco cobra una tasa de interés simple de 45% sobre el saldo de la tarjeta de crédito. ¿Cuánto tendrá que pagar el dueño de la tarjeta al banco si mantiene un saldo de $1 500 durante 73 días?

$$P_0 = 1\,500, \qquad t = 73 \text{ días}, \qquad R = 45\%$$

Solución: Sustituimos los datos del problema en la fórmula

$$P_t = P_0\left[1 + R\left(\frac{n}{360}\right)\right] = 1\,500\left[1 + 0.45\left(\frac{73}{360}\right)\right] = 1\,636.87$$

Respuesta: Tendrá que pagar $1 636.87. El no pagar a tiempo le habrá costado $136.87 de intereses.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Calcule el interés generado por una deuda de $25 000 durante 51 días, si el acreedor cobra una tasa de interés simple de 33%.

Respuesta: $1 168.75

La fórmula de interés simple tiene cuatro variables. Si conocemos el valor de tres de ellas, podemos fácilmente despejar el valor de la cuarta. En el siguiente ejemplo calcularemos la tasa de interés simple implícita en un contrato.

EJEMPLO 4

Para recibir $1 000 hoy, Alonso firma un pagaré por $1 200 pagadero dentro de 6 meses. ¿Cuál es la tasa de interés simple anual implícita en este pagaré?

$$P_0 = 1\,000, \qquad P_t = 1\,200, \qquad t = 6 \text{ meses} = 6/12 = 0.5 \text{ años}, \qquad R = ?$$

Solución:

$$P_t = P_0\,(1 + tR)$$
$$1\,200 = 1\,000\,(1 + 0.5R_a)$$
$$R_a = 0.4 = 40\%$$

Respuesta: El pagaré implica una tasa anual de interés simple de 40%.

También podemos resolver el ejemplo 4 utilizando como unidad de tiempo un mes. Primero despejamos la tasa mensual de la ecuación del valor futuro y a continuación la multiplicamos por 12 para obtener la tasa anual.

$$P_t = P_0(1 + tR)$$
$$1\,200 = 1\,000(1 + 6R_m)$$
$$R_m = 0.2/6 = 0.0333 = 3.33\%$$
$$R_a = 12 \times R_m = 40\%$$

Donde t es el número de meses
R_m es la tasa de interés mensual
R_a es la tasa de interés anual

EJEMPLO 5

Una agencia le ofrece a Velasco un automóvil por $95 000, pagaderos dentro de 3 meses. En caso de liquidación en efectivo hay un descuento de 10%. ¿Qué tasa anual de interés simple está implícita en este descuento?

$$P_3 = 95\,000, \qquad t = 3/12 = 0.25 \text{ años}, \qquad R = ?$$

Solución: Primero calculamos el precio al contado, que es $95 000 menos 10%:

$$P_0 = 95\,000 - 9\,500 = 85\,500 \qquad (\text{así, } 10\% \text{ de } \$95\,000 \text{ es } \$9\,500)$$

$$P_t = P_0\,(1 + tR)$$
$$95\,000 = 85\,500\,(1 + 0.25R_a)$$
$$R_a = 0.4444 = 44.44\%$$

Respuesta: El descuento implica una tasa anual de interés simple de 44.44%.

Otra manera de resolver este problema es aplicando la equivalencia entre la tasa de descuento bancario y la tasa de interés que vimos en la introducción:

$$R = \frac{R_D}{1 - R_D}$$

Sustituyendo en esta ecuación la tasa de descuento de 10%, tenemos:

$$R = \frac{0.1}{1-0.1} = \frac{0.1}{0.9} = 0.1111 = 11.11\%$$

En escala trimestral, 11.11% equivale a 44.44% en escala anual.

Volveremos a la cuestión del descuento en la siguiente sección.

Si conocemos el valor presente de la deuda, su valor futuro y la tasa de interés, podemos calcular el periodo de la misma.

EJEMPLO 6

Una deuda de $70 000 se liquidó con un pago de $84 389. ¿Cuál fue el periodo de préstamo, si la tasa de interés simple cobrada fue de 37%?

$$P_0 = 70000, \qquad P_n = 84389, \qquad R = 37\%, \qquad n = ?$$

Solución:

$$84\,389 = 70\,000\left[1 + 0.37\left(\frac{n}{360}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad n = 200$$

Respuesta: El plazo del préstamo fue de 200 días.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Un pagaré por $34 500 a 100 días tiene el valor al vencimiento de $40 000.¿Qué tasa de interés simple está pagando el prestatario?

Respuesta: 57.39%.

VALOR PRESENTE Y DESCUENTO

Hasta ahora hemos utilizado la fórmula del interés simple para calcular el valor futuro, con base en el valor presente, la tasa de interés y el plazo. En esta sección estudiaremos dos métodos de calcular el valor presente con base en el valor futuro.

Descuento racional

El proceso de descuento consiste en calcular el valor presente con base en el valor futuro. El método de descuento que usa la fórmula del interés simple se llama *descuento racional*.[2] El descuento racional utiliza el monto (valor futuro), la tasa de interés y el plazo, pero su uso en matemáticas financieras es poco frecuente. Un ejemplo será suficiente para ilustrar el procedimiento.

EJEMPLO 1

¿Cuál es el valor presente de $3000 que se recibirán dentro de 18 meses, con un interés simple de 50% anual?

$$VF = 3000, \qquad R = 50\% = 0.5 \text{ anual}, \qquad t = 18/12 = 1.5 \text{ años}$$

Solución: En la fórmula del interés simple sustituimos los datos del problema y despejamos el valor presente:

$$VF = VP(1 + tR)$$

$$3000 = VP(1 + 1.5 \times 0.5) = VP(1.75)$$

$$VP = 1714.28$$

Respuesta: El valor presente de $3000 que se recibirán dentro de 18 meses es de $1 714.28.

Esta respuesta significa que $1 714.28 depositados en una cuenta que rinde 50% anual, calculado con interés simple, después de 18 meses se convierte en $3 000.

La fórmula para calcular el valor presente con la tasa de interés simple es:

$$VP = \frac{VF}{1 + tR}$$

donde t es el número de periodos para los que se calcula la tasa de interés, R. Si R es una tasa nominal anual y t es el número de días, la fórmula se convierte en:

$$VP = \frac{VF}{1 + R\left(\frac{t}{360}\right)}$$

La tasa de rendimiento (o de interés) se aplica al valor inicial.

La tasa de interés aplicada en el descuento racional **no es** la tasa de descuento. Es la *tasa de rendimiento* (o tasa de interés). En el ejemplo 5, si alguien comprara un pagaré con el valor nominal de $3 000 a 18 meses por $1 714.28, su rendimiento hubiera sido de 50% anual.

[2] El descuento racional es también conocido como el descuento simple, real o justo.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

¿Cuánto recibe el librador de un pagaré a 55 días con el valor al vencimiento de $100 000, si el instrumento paga el interés simple de 41.5% anual?

Respuesta: $94 037.75.

Descuento bancario

La tasa de descuento bancario es más baja que la tasa de rendimiento.

La *tasa de descuento bancario* (R_D) se aplica al valor final y su valor siempre es más bajo que el de la tasa de interés. El descuento bancario[3] es igual al valor final (monto) multiplicado por la tasa de descuento.

$$\text{Descuento} = VF \times R_D$$

En el ejemplo 1, el descuento es el valor del pagaré menos el precio pagado por él:

$$\text{Descuento} = VF - VP = 3\,000 - 1\,714.28 = 1\,285.71$$

La tasa de descuento es el descuento dividido entre el valor final:

$$R_D = \frac{\text{Descuento}}{VF} = \frac{1285.71}{3000} = 0.4286 = 42.86\%$$

Así, 42.86% es la tasa de descuento en el periodo de 18 meses. Para anualizarla tenemos que dividirla entre 18 y multiplicar por 12. La tasa de descuento anual es de 28.57%, mucho menor que la tasa de rendimiento de 50%.

$$1\,714.28 = 3\,000(1 - R_D) \qquad \text{de donde} \qquad R_D = 0.4286 = 42.86\%$$

Para calcular la tasa de descuento bancario anual implícita en el ejemplo 1, podemos despejarla de la siguiente ecuación:

$$1\,714.28 = 3\,000\left(1 - R_D\frac{18}{12}\right)$$

de donde $R_D = 28.57\%$.

Una manera alternativa de calcular la tasa de descuento es aplicar la equivalencia entre la tasa de interés y la de descuento, ajustando la tasa de interés por el periodo de descuento:

$$R_D = \frac{R}{1 + R\left(\frac{18}{12}\right)} = \frac{0.5}{1 + 0.5\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{0.5}{1.75} = 0.2857 = 28.57\%$$

[3] También conocido como el *descuento comercial*.

La tasa de interés de 50% es anual, pero el periodo del descuento es 18 meses. Para reflejar este hecho, dividimos la tasa de interés del denominador de la fórmula por 12 y la multiplicamos por 18. En virtud de esta operación calculamos la tasa de descuento anual, aun cuando el descuento se aplique a un periodo de 18 meses.

Vamos a resumir y generalizar la relación entre las tasas de rendimiento y de descuento bancario.

El descuento bancario es el valor final multiplicado por la tasa de descuento:

$$\text{Descuento} = VF \times R_D$$

Según la práctica común, la tasa de descuento se publica como una tasa anual. Si el periodo de descuento es diferente a un año, necesitamos ajustar la tasa al periodo de descuento. Con este fin, dividimos la tasa de descuento anual entre 360 y la multiplicamos por el número de días del periodo de descuento, n.

Tasa de descuento para un periodo de n días: $R_D\left(\dfrac{n}{360}\right)$

El descuento aplicable a n días: $B_N \times R_D\left(\dfrac{n}{360}\right)$

El valor presente es el valor futuro menos el descuento:

$$B_0 = B_N - B_N \times R_D\left(\frac{n}{360}\right) = B_N\left[1 - R_D\left(\frac{n}{360}\right)\right]$$

EJEMPLO 2

¿Cuál es el valor presente de un pagaré de \$100 que vence en 150 días si la tasa de descuento es de 25% anual?

$$VF = B_N = 100, \quad R_D = 25\% \text{ anual}, \quad t = 150 \text{ días}$$

Solución: Aplicamos la fórmula general para el valor presente con el descuento bancario:

$$VP = B_0 = B_N\left[1 - R_D\left(\frac{n}{360}\right)\right] = 100\left(1 - 0.25 \times \frac{150}{360}\right) = 89.58$$

Respuesta: El valor presente de \$100 que se recibirá dentro de 150 días con la tasa de descuento de 25% es \$89.58.

El ejemplo 2 puede ser interpretado de la siguiente manera: el banco presta \$100 a 150 días, pero cobra los intereses de \$10.42 por anticipado y entrega al deudor tan sólo \$89.58. La cantidad de \$10.42 de \$100 representa la tasa de interés de 25% anual, pero calculada sobre el valor final. En virtud de esta interpretación, el descuento bancario a veces se llama cobro de *intereses por anticipado*.

Para el librador del pagaré sería un error considerar la tasa de descuento como el costo de capital. Su costo de capital es igual a la tasa de rendimiento que obtiene el banco.

$$R = \left(\frac{100}{89.58} - 1\right)\frac{360}{150} = 0.2791 = 27.91\%$$

En algunos casos, el objetivo de cobrar los intereses por adelantado es disfrazar la magnitud real de la tasa de interés.

EJEMPLO 3

Calcule el precio de un bono a 28 días, si su valor nominal es $10 y la tasa de descuento aplicable es de 23%.

$$B_N = 100, \qquad R_D = 23\% \text{ anual}, \qquad n = 28 \text{ días}$$

Solución: $B_0 = B_N\left[1 - R_D\left(\frac{n}{360}\right)\right] = 10\left(1 - 0.23 \times \frac{28}{360}\right) = 9.8211$

Respuesta: El bono a 28 días, con la tasa de descuento de 23%, cuesta $9.8211.

Ahora ya tenemos todos los elementos para desarrollar una fórmula que convierte la tasa de descuento en tasa de rendimiento, si el plazo es de n días.

El valor presente de una cantidad B_N a n días, descontado con la tasa de descuento R_D es:

$$B_0 = B_N - B_N \times R_D\left(\frac{n}{360}\right)$$

El valor presente de una cantidad B_N a n días, descontado con la tasa de rendimiento R es:

$$B_0 = \frac{B_N}{1 + R\left(\frac{n}{360}\right)}$$

Igualando los lados derechos de estas dos ecuaciones y dividiéndolos entre B_N, tenemos:

$$1 - R_D\left(\frac{n}{360}\right) = \frac{1}{1 + R\left(\frac{n}{360}\right)}$$

Despejando R de esta ecuación obtenemos una fórmula general que transforma la tasa anual de descuento en una tasa (también anual) de rendimiento:

$$\boxed{R = \frac{R_D}{1 - R_D\left(\frac{n}{360}\right)}}$$

Despejando de esta fórmula R_D, obtenemos la fórmula general que convierte la tasa de rendimiento en la tasa de descuento:

$$\boxed{R_D = \frac{R}{1 + R\left(\frac{n}{360}\right)}}$$

EJEMPLO 4

¿Cuál es el rendimiento de un Cete (Certificado de la Tesorería mexicana) a 91 días, si su tasa de descuento es de 21.5%?

$$R_D = 21.5\%, \qquad n = 91 \text{ días}$$

Solución:

$$R = \frac{R_D}{1 - R_D\left(\frac{n}{360}\right)} = \frac{0.215}{1 - 0.215\left(\frac{91}{360}\right)} = 0.2274 = 22.74\%$$

Respuesta: El rendimiento de un Cete a 91 días, con la tasa de descuento de 21.5% es de 22.74%.

Volveremos a utilizar las fórmulas de conversión de las tasas de descuento en las tasas de rendimiento en la parte del libro dedicada a matemáticas bursátiles.

Cuadro 3.1

Comparación entre el descuento bancario y el descuento racional.

Descuento

	Bancario (comercial)	Racional (simple)
Valor presente	$B_0 = B_N\left[1 - R_D\left(\frac{n}{360}\right)\right]$	$B_0 = \frac{B_N}{1 + R\left(\frac{n}{360}\right)}$
Descuento (interés)	$B_N R_D\left(\frac{n}{360}\right)$	$B_0 R\left(\frac{n}{360}\right)$

APLICACIONES

Como consecuencia de una aceleración de la inflación desde mediados de la década de 1970, el interés simple cayó en desuso. En casi todas las transacciones se sustituye por el interés compuesto. Sin embargo, sigue utilizándose en algunas transacciones a corto plazo, como cálculo del precio de los Cetes (bonos del gobierno mexicano), ventas a plazo, tarjetas de crédito, préstamos prendarios (empeño) y pago anticipado de facturas. Todas sus aplicaciones requieren de la fórmula elemental del interés simple:

$$\boxed{P_t = P_0\,(1 + tR)}$$

Conociendo tres de sus variables, se puede despejar la restante y determinar su valor.

EJEMPLO 1

Por un pagaré con el valor nominal de $100 que vence en 100 días el banco paga $90.

a) ¿Cuál es la tasa de descuento que aplica el banco?

b) ¿Cuál es la tasa de rendimiento para el banco?

$$B_0 = 90, \quad B_N = 100, \quad n = 100 \text{ días}$$

Solución:

$$B_0 = B_N - B_N \times R_D\left(\frac{n}{360}\right)$$

Despejando de esta ecuación R_D, tenemos:

$$R_D = \frac{B_N - B_0}{B_N} \times \frac{360}{n}$$

La sustitución de los valores del problema produce:

a) $R_D = \dfrac{100 - 90}{100} \times \dfrac{360}{100} = 0.36 = 36\%$

b) $B_N = B_0\,(1 + nR)$, donde $n = 100$ días

Despejando de esta ecuación R y sustituyendo los datos del problema, tenemos:

$$R = \left(\frac{B_N}{B_0} - 1\right)\frac{360}{n} = \left(\frac{100}{90} - 1\right)\frac{360}{100} = 0.4 = 40\%$$

Podemos obtener la misma respuesta aplicando la fórmula que convierte la tasa de descuento en la de rendimiento:

$$R = \frac{R_D}{1 - R_D\left(\dfrac{n}{360}\right)} = \frac{0.36}{1 - 0.36\left(\dfrac{100}{360}\right)} = 0.4 = 40\%$$

Respuesta: El banco aplica una tasa de descuento de 36% y obtiene una tasa de rendimiento de 40%.

El siguiente problema consiste en calcular el plazo con base en el valor presente, el valor futuro y la tasa de interés.

EJEMPLO 2

Un pagaré con el valor nominal de $100 tiene el precio de $85.71. La tasa de interés aplicable a este tipo de documentos es de 30%. ¿Cuál es el plazo del pagaré en días?

$$B_0 = 85.71, \qquad B_N = 100, \qquad R = 30\%$$

Solución: Despejamos n la ecuación $B_N = B_0\,(1 + nR)$ y sustituimos los datos del problema:

$$n = \frac{\frac{B_N}{B_0} - 1}{R} = \frac{\frac{100}{85.71} - 1}{0.3} = 0.5558 \text{ años} = 200 \text{ días}$$

Respuesta: El plazo del pagaré es de 200 días.

A veces se compra un documento a plazo a una tasa de interés y se vende antes del vencimiento, cuando las tasas de interés del mercado son diferentes. En este caso, el rendimiento que se obtiene en el periodo de tenencia del documento puede ser mayor o menor que la tasa de interés nominal.

EJEMPLO 3

Un certificado de depósito a 270 días con el valor inicial de $100 produce una tasa de interés simple de 32% anual. Después de 90 días se vende el documento, cuando la tasa de interés para este tipo de documentos ha bajado a 27%.

a) ¿A qué precio puede venderse el certificado de depósito después de 90 días?

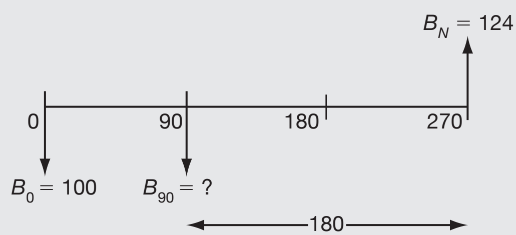
b) ¿Qué rendimiento (anual) obtuvo el dueño del certificado durante los 90 días de su tenencia?

$$B_0 = 100, \qquad R = 32\%, \qquad n = 270 \text{ días} = 270/360 = 0.75 \text{ años}$$

Solución: Primero calculamos el valor futuro del certificado de depósito, después de 270 días, sustituyendo los datos del problema en la ecuación $B_N = B_0\,(1 + nR)$:

$$B_N = 100[1 + 0.75(0.32)] = 124$$

Para contestar al punto *a*) dibujamos una línea de tiempo:



Después de 90 días el certificado de depósito se convierte en un nuevo instrumento, con el valor futuro de $124 en 180 días y la tasa de interés de 27%. Calculamos su precio sustituyendo los datos del problema en la ecuación del valor presente:

$$VP = \frac{VF}{1 + tR} = \frac{124}{1 + 0.5(0.27)} = 109.25$$

b) El dueño del certificado lo compró a $100 y lo vendió, 90 días después, a $109.25, logrando una ganancia de $9.25. Esto se traduce en rendimiento de 9.25% en 90 días, o sea 37% en escala anual. Su ganancia durante la tenencia del instrumento resultó más alta que la tasa de interés pactada originalmente. Esto se debe a que en el momento de venta del certificado las tasas de interés del mercado eran más bajas que en el momento de su compra.

De manera más formal, podemos calcular el rendimiento del periodo de tenencia (anualizado) como:

$$R = \frac{B_{90} - B_0}{B_0} \times \frac{360}{90} = \frac{109.25 - 100}{100} \times 4 = 0.37 = 37\%$$

Respuesta:

a) Después de 90 días el certificado puede venderse a $109.25.

b) Durante los 90 días de tenencia del certificado su dueño realizó un rendimiento anualizado de 37%.

EJEMPLO 4

El señor Pérez acepta un pagaré de $25 000 a 200 días. La tasa de descuento para este tipo de documentos es de 36%. Después de 100 días está obligado a vender el pagaré a un banco que aplica una tasa de descuento de 44%.

a) ¿Qué precio puede pagar el señor Pérez por el pagaré?

b) ¿Qué rendimiento obtendría si mantuviera el pagaré los 200 días?

c) ¿Qué cantidad obtendrá por su pagaré después de 100 días?

d) ¿Qué rendimiento (anual) habrá logrado durante los 100 días?

$$B_N = 25\,000, \qquad R_D = 36\%, \qquad n = 200 \text{ días}$$

Solución:

a) El valor presente del pagaré a 200 días es:

$$B_0 = B_N - B_N \times R_D\left(\frac{n}{360}\right) = 25\,000 - 25\,000 \times 0.36\left(\frac{200}{360}\right) = 20\,000$$

b) Aplicando la fórmula de equivalencia entre la tasa de rendimiento y la de descuento bancario, tenemos:

$$R = \frac{R_D}{1 - R_D\left(\frac{n}{360}\right)} = \frac{0.36}{1 - 0.36\left(\frac{200}{360}\right)} = 0.45 = 45\%$$

c) Después de 100 días el pagaré original se convierte en otro pagaré, con el mismo valor nominal, pero con el plazo de 100 días y la tasa de descuento de 44%. Su valor presente es:

$$B_0 = B_N - B_N \times B_D\left(\frac{n}{360}\right) = 25\,000 - 25\,000 \times 0.44\left(\frac{100}{360}\right) = 21\,944.44$$

d) Durante los 100 días de la tenencia del pagaré, el señor Pérez obtuvo una *ganancia de capital* de \$1 944.44, esto es 9.72% de la cantidad inicial. Su rendimiento anualizado es de 35%.

$$R = \left(\frac{21\,944.44}{20\,000} - 1\right)\frac{360}{100} = 0.35 = 35\%$$

Respuesta:

a) El señor Pérez puede pagar \$20 000 por el pagaré.

b) Si mantuviera el pagaré hasta el vencimiento, obtendría un rendimiento anualizado de 40%.

c) Después de 100 días puede vender el pagaré por \$21 944.44.

d) Su rendimiento del periodo de tenencia es de 35%, menos que el rendimiento al vencimiento.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Un pagaré por \$70 000 a 120 días produce una tasa de interés simple de 27%. Después de 50 días el documento es descontado en un banco con la tasa de descuento de 30%. Calcule: *a*) el valor del pagaré al vencimiento, *b*) el precio descontado del bono después de 50 días, *c*) el rendimiento que obtuvo el tenedor del bono durante los 50 días de su tenencia.

Respuestas: *a*) \$76 300, *b*) \$71 849.17, *c*) 19.02%

FÓRMULAS DEL CAPÍTULO

Valor futuro con el interés simple $Pt = P_0\,(1 + tR)$	Valor presente con el interés simple $P_0 = \dfrac{P_t}{1 + tR}$
Tasa de rendimiento $R = \dfrac{R_D}{1 - R_D\left(\dfrac{n}{360}\right)}$	Tasas de descuento $R_D = \dfrac{R}{1 + R\left(\dfrac{n}{360}\right)}$
Descuento racional $B_0R\left(\dfrac{n}{360}\right)$	Descuento bancario $B_NR_D\left(\dfrac{n}{360}\right)$

Términos clave

Convención del fin de periodo
Descuento bancario
Diagrama de tiempo y valor
Ganancia de capital
Interés
Interés simple
Principal
Rendimiento al vencimiento
Rendimiento del periodo de tenencia
Tiempo convencional (comercial)
Tasa de descuento
Tiempo exacto
Valor futuro (valor terminal)
Valor presente (valor inicial)

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. ¿Cómo se calcula el interés con el método del interés simple?
2. El diagrama de flujo del problema 1 representa el **punto de vista del deudor**. Dibuje el mismo diagrama desde el punto de vista del acreedor.
3. Interprete la expresión: $P_N - P_0 = P_0\,(tR)$ como el interés ganado en el periodo N, donde tR es la tasa de interés aplicable a todo el periodo N.
4. Calcule el interés simple sobre $1 500 al 20% ganado durante 150 días.
5. ¿Cuál es el interés simple sobre $800 al 25% en el periodo de 9 meses?
6. El saldo de débito en una tarjeta de crédito que se debe pagar hoy es de $15 000. El banco cobra la tasa mensual de 4.5%, interés simple. ¿Qué cantidad se tendrá que pagar por concepto de intereses si no se puede liquidar la deuda en 5 meses?
7. ¿Cuál es el interés que generan $25 000 durante 110 días, si la tasa de interés es de 48% anual, calculada como interés simple?
8. Se contrata una deuda de $1 000 al 30%. ¿Cuánto se tendrá que devolver después de 3 meses?
9. ¿Cuál es el valor futuro de una deuda de $900 al 30% después de 10 meses?
10. Se firma un pagaré por $3 000, pagadero en 7 meses. ¿Cuál es el valor presente de este pagaré si el acreedor cobra una tasa de 35%, calculada con interés simple?
11. ¿Cuál es el valor presente de un pagaré de $2 500 a 11 meses al 27.27% de interés simple?
12. Un deudor que recibe $1 200 hoy tendrá que devolver $1 500 en 9 meses. ¿Qué tasa de interés simple está implícita en este contrato?
13. El valor presente de un pagaré de $23 000 a 90 días es $21 000. ¿Qué tasa de interés simple paga el emisor del pagaré?
14. El valor presente de un pagaré de $1 400 al 32% de interés simple es $1 000. ¿Cuál es el plazo del pagaré en días?
15. ¿Qué plazo debe de tener un pagaré de $200 si su valor presente es $160 y la tasa de interés (simple) aplicada a ese tipo de contratos es de 25%?
16. Un pagaré de $120 000, pagadero en 150 días, se descuenta con una tasa de descuento de 35% anual. Después de 50 días el pagaré se vende, pero el nuevo comprador lo descuenta con la tasa de 40%.
    a) ¿Cuál es el valor presente del pagaré?
    b) ¿A cuánto se venderá después de 50 días?
    c) ¿Qué rendimiento anualizado logró el comprador original durante los 50 días de tenencia?

17. ¿Por qué la tasa de descuento bancario siempre es más baja que la tasa de interés (de rendimiento)?
18. Explique por qué el descuento para el emisor es lo mismo que la ganancia de capital para el inversionista.
19. Un certificado de depósito de $100 000 (valor inicial) a 90 días produce una tasa de interés simple de 24% anual. Supongamos que el certificado es negociable y se vende después de 45 días, cuando la tasa de interés para este tipo de documento es de 20%.
    a) ¿Cuál es el valor futuro del certificado?
    b) ¿Cuál es su valor de venta (presente) después de 45 días?
    c) ¿Qué rendimiento anualizado logró el comprador original del certificado de depósito durante los 45 días de tenencia?
20. Explique por qué el dueño de un instrumento financiero con una tasa de rendimiento dada gana si durante el periodo de tenencia del instrumento las tasas de interés del mercado bajan.
21. Explique por qué el emisor de un instrumento financiero pierde si durante la vida del instrumento las tasas de interés bajan.

CAPÍTULO 4

Interés compuesto

Objetivos del aprendizaje

Después de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

- Comprender la mecánica y el significado económico de capitalización de intereses.
- Distinguir entre la capitalización de intereses y la usura.
- Derivar la fórmula del valor futuro con el interés compuesto.
- Entender el poder del crecimiento exponencial.
- Comprender la diferencia entre el interés simple y el interés compuesto.
- Calcular el valor futuro con diferentes periodos de capitalización.
- Utilizar el módulo VDT de una calculadora financiera.
- Calcular el valor futuro cuando el plazo es una fracción.
- Entender los conceptos tasa efectiva y tasas equivalentes.
- Calcular la tasa efectiva tanto con la fórmula como en la calculadora financiera.
- Calcular las tasas equivalentes para tasas nominales con diferentes periodos de capitalización.
- Calcular el plazo y la tasa de interés necesarios para la multiplicación del principal.
- Calcular la tasa de crecimiento promedio dados los puntos finales.
- Anualizar la inflación quincenal y mensual.
- Calcular el rendimiento real de un instrumento financiero.
- Aplicar la fórmula del crecimiento continuo.

CONCEPTOS BÁSICOS

En el interés compuesto, los intereses que se van generando se suman al capital en periodos establecidos y se consideran, junto con el capital original, como base para calcular los intereses del periodo siguiente. Los intereses se *capitalizan*. El cálculo de "intereses sobre intereses" es una característica fundamental del interés compuesto que no tiene nada que ver con la usura.[1]

En el interés compuesto el capital no es constante, sino que aumenta al final de cada periodo por la adición de los intereses ganados.

El periodo para el cual se calculan los intereses se llama *periodo de capitalización*. Los periodos de capitalización típicos son anual, semestral, trimestral, mensual y diario. Al número de veces que el interés se capitaliza durante un año se le denomina *frecuencia de conversión* (o el número de capitalizaciones al año).

La tasa de interés se expresa en forma anual, indicando el número de capitalizaciones; por ejemplo, 12% anual capitalizable mensualmente, lo que equivale a 1% mensual. La tasa de interés por periodo es la tasa anual dividida entre la frecuencia de conversión:

$$\text{Tasa de interés por periodo} = \frac{\text{Tasa de interés anual}}{\text{Frecuencia de conversión}}$$

La tasa mensual, por ejemplo, es la tasa anual dividida entre 12:

$$R_{\text{mensual}} = \frac{R_{\text{anual}}}{12}$$

Para analizar el interés compuesto utilizaremos los mismos símbolos que para el interés simple:

- P_0 capital inicial, valor del principal en el momento 0; *VP* (valor presente) o *VA* (valor actual) son símbolos alternativos
- n tiempo o plazo. Alternativamente, t
- P_t monto (capital más intereses) en el momento t. Alternativamente, P_N o *VF* (valor futuro)
- R tasa de interés nominal

Como siempre, el *interés* ganado en el periodo es la diferencia entre el valor al final del periodo y su valor al principio del periodo. El interés ganado en el periodo de t a $t + 1$ es:

$$\text{Interés} = P_{t+1} - P_t \qquad (P_1 - P_0)$$

[1] La usura es un cobro de intereses inmoderadamente elevados, en comparación con los del mercado, aprovechando que el prestatario no tiene acceso a otras fuentes de crédito.

La *tasa de interés* es el interés (ganancia de capital) dividido entre el valor inicial:

$$R = \frac{\text{Interés}}{P_0} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \quad \left(R = \frac{P_1 - P_0}{P_0} \right)$$

El interés también puede expresarse como el valor inicial multiplicado por la tasa de interés del periodo:

$$\text{Interés} = P_t \times R$$

Con el método del interés compuesto, si el interés ganado en un periodo no se retira, *el interés se suma al capital* y forma parte de la base para calcular el interés del periodo siguiente. Así, el interés compuesto es diferente para cada uno de los periodos consecutivos:

El valor después de un periodo es: $P_1 = P_0 + P_0R = P_0\,(1 + R)$.

Cuando hay un solo periodo, el interés simple y el compuesto producen los mismos resultados.

El interés ganado en el primer periodo es P_0R, igual que con el interés simple.

El valor después de dos periodos es:

$$P_2 = P_1 + P_1R = P_1(1+R) = \underbrace{P_0(1+R)}_{P_1}(1+R) = P_0(1+R)^2$$

El interés ganado en el segundo periodo es P_1R, mientras que con el interés simple el interés sería igual a P_0R.

$$P_1R = P_0\,(1 + R)\,R > P_0\,R$$

$$P_1R - P_0R = P_0R + P_0R^2 - P_0R = P_0R^2$$

El producto P_0R^2, la diferencia entre P_1R y P_0R, se debe a la *capitalización de intereses* con el método de interés compuesto.

El valor después de tres periodos es:

$$P_3 = P_2 + P_2R = \overbrace{\underbrace{P_0(1+R)}_{P_1}(1+R)}^{P_2}(1+R) = P_0(1+R)^3$$

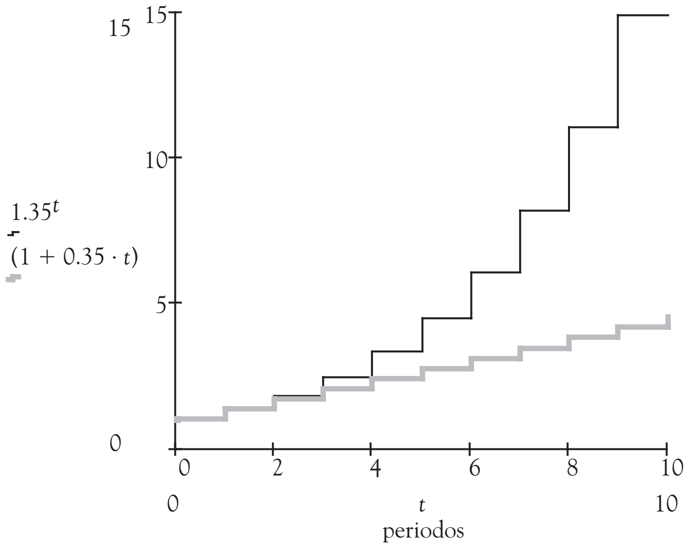
El interés ganado en el tercer periodo es: $P_2R = P_0\,(1 + R)^2\,R$

Al observar las fórmulas para P_1, P_2 y P_3 vemos que el valor después de cada periodo es igual al valor inicial multiplicado por el factor $(1 + R)$ elevado a la potencia igual al número del periodo. Generalizando esta observación, obtenemos la fórmula para cualquier periodo t:

$$\boxed{P_t = P_0(1+R)^t}$$

Figura 4.1

$P_0 = 1$, $R = 35\%$, $t = 10$. La gráfica de una función exponencial discreta se parece a una escalera, en la que cada escalón es más alto que el anterior. Para fines de comparación presentamos abajo la gráfica de una función que crece según el interés simple (escalera de escalones iguales). Durante los primeros periodos las dos funciones son casi indistinguibles. Después, la diferencia se vuelve cada vez más pronunciada.



***The greatest shortcoming of the human race is its inability to understand the exponential relation.* [El mayor defecto de la especie humana es su incapacidad para comprender la relación exponencial]**

Albert A. Bartlett, profesor de Física, Universidad de Colorado

Esta ecuación es la *ecuación fundamental del interés compuesto* y supone la reinversión de los intereses ganados a la tasa constante, R. Desde el punto de vista matemático, la ecuación del interés compuesto representa el *crecimiento exponencial discreto*, donde R es la tasa de crecimiento. La expresión $(1 + R)^t$, llamada a veces *factor del interés compuesto*, es el valor de \$1 que crece a un ritmo de R% durante t periodos. El crecimiento ocurre porque los fondos se invierten en proyectos que aumentan la producción y la riqueza. El crecimiento es una de las principales fuentes del valor.

La gráfica del crecimiento exponencial discreto es una escalera cuyos escalones son cada vez más altos. La *convención del fin del periodo* se refleja en el hecho de que durante cada periodo el valor de la variable dependiente se mantiene constante y aumenta sólo al final del periodo.

En periodos prolongados, el crecimiento exponencial es muy fuerte. Uno de los objetivos de este libro es sensibilizar al lector respecto a este poder. En el recuadro siguiente se reproducen tres casos cuyo estudio induce a respetar el crecimiento exponencial.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Poder del interés compuesto

(1) En 1624 un jefe indio vendió la isla de Manhattan, en Nueva York, por 24 dólares. Dicha cantidad parece hoy ridículamente baja. Sin embargo, si el jefe indio hubiera depositado esta cantidad en una cuenta que rindiese 6% anual, hoy tendría la increíble suma de \$105 134 millones, cantidad suficiente para recomprar una buena parte de Nueva York.

$$\text{Cálculo: } 2005 - 1624 = 381 \text{ años}, \qquad 24(1.06)^{381} = 105\,134\,658\,313$$

(2) Una hoja de papel tiene un grosor de 0.01 cm. Cada vez que se dobla, su grosor se duplica. ¿Cuál será el grosor de la hoja después de 50 dobleces?

Respuesta: $0.01 \times 2^{50} = 112\,589\,990.68$ kilómetros.

(cada kilómetro tiene 100 000 centímetros)

(3) La superficie cubierta por nenúfar (una planta acuática) en un lago se duplica cada día. Sabemos que en 30 días el nenúfar cubrirá todo el lago.

Pregunta: ¿En qué día estará cubierta por el nenúfar el 50% de la superficie del lago?

Respuesta: En el día 29.

Cuando los administradores del lago se den cuenta del peligro, tendrán sólo un día para salvar el lago.

Reto: ¿Qué porcentaje estará cubierto en los días 20 y 25?

Respuesta: 0.1% y 3.13% de la superficie, respectivamente.

Cuadro 4.1

Comparación del interés simple con el interés compuesto.

Interés simple	Interés compuesto
$P_t = P_0(1 + tR)$ Interés $= P_t - P_0 = P_0(tR)$ El interés se calcula para todo el periodo con base en el valor inicial.	$P_t = P_0\,(1 + R)^t$ Interés $= P_t - P_0 = P_0\left[(1+R)^t - 1\right]$ El interés se capitaliza. La base sobre la que se calcula el interés aumenta cada periodo.

EJEMPLO 1

Se depositan \$1 000 a una tasa de interés de 12% anual, capitalizada anualmente, a 3 años. ¿Cuál será el valor del depósito después de 3 años?

$$P_0 = 1\,000, \quad R = 0.12, \quad t = 3$$

Aplicando la fórmula para el valor futuro de un depósito, tenemos:

$$P_3 = P_0\,(1 + R)^3 = 1\,000(1.12)^3 = 1\,404.93$$

Respuesta: En 3 años, \$1 000 se convierten en \$1 404.93

FRECUENCIA DE CONVERSIÓN

Cuando el número de capitalizaciones en un año (la frecuencia de conversión) es mayor que 1, la ecuación del interés compuesto tiene que ser modificada. La tasa de interés anual hay que dividirla entre la frecuencia de conversión y el plazo hay que multiplicarlo por la frecuencia de conversión.

R	tasa anual,	plazo	t	años
$R/2$	tasa semestral,	plazo	$2t$	semestres
$R/12$	tasa mensual,	plazo	$12t$	meses
R/m	tasa capitalizable m veces al año,	plazo	mt	periodos de $360/m$ días

Con la capitalización m veces al año, la expresión $(1 + R)$ se convierte en $\left(1+\dfrac{R}{m}\right)^m$

La expresión $\left\{\left(1+\dfrac{R}{m}\right)^m - 1\right\}$ se llama *tasa anual efectiva.*

Si $R = 0.36$ y $m = 12$, entonces la tasa mensual es $\dfrac{R}{m} = \dfrac{0.36}{12} = 0.03$.

Con la capitalización mensual, el valor de \$1 después de un año será:

$$\underbrace{1.03 \times 1.03 \times \cdots \times 1.03}_{12 \text{ veces}} = 1.03^{12} = 1.4258$$ [2]

La fórmula general para el valor futuro con la tasa de interés anual R capitalizable m veces al año es:

$$\boxed{P_t = P_0\left[\left(1+\frac{R}{m}\right)^m\right]^t = P_0\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mt}}$$

EJEMPLO 1

Con los datos del ejemplo 1 de la sección "Conceptos básicos", calcule el valor del depósito después de 3 años, si la tasa de interés de 36% es capitalizada *a*) trimestralmente, *b*) mensualmente, *c*) diariamente. $P_0 = 1000$, $R = 0.36$, $t = 3$

a) $m = 4$ Capitalización trimestral

$$P_t = P_0\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mt} = 1000\left(1+\frac{0.36}{4}\right)^{4\times3} = 2\,812.66$$

[2] Anticipándonos un poco, podemos afirmar que si la tasa nominal de 36% anual se capitaliza mensualmente, la tasa efectiva será de 42.58%.

b) $m = 12$ Capitalización mensual

$$P_t = P_0\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mt} = 1\,000\left(1+\frac{0.36}{12}\right)^{12\times 3} = 2\,898.28$$

c) $m = 360$ Capitalización diaria

$$P_t = P_0\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mt} = 1\,000\left(1+\frac{0.36}{360}\right)^{360\times 3} = 2\,943.09$$

Los resultados de este ejemplo indican claramente que, dada la tasa nominal, el capital crece más rápido mientras mayor sea la frecuencia de conversión. La mayor ganancia (297.21) se obtiene pasando de la capitalización anual a la trimestral. La transición de la capitalización trimestral a la diaria proporciona una ganancia adicional de sólo 44.81.

INTRODUCCIÓN A LA CALCULADORA FINANCIERA

En matemáticas financieras, el resultado puede obtenerse utilizando las tablas de interés compuesto, una calculadora científica o una calculadora financiera. El autor recomienda el uso de la calculadora financiera, pues ahorra mucho trabajo y reduce el número de errores. De ahora en adelante introduciremos algunas indicaciones para utilizar la calculadora financiera Hewlett-Packard 17B II. El uso de la calculadora HP 19 Business Consultant es muy semejante.

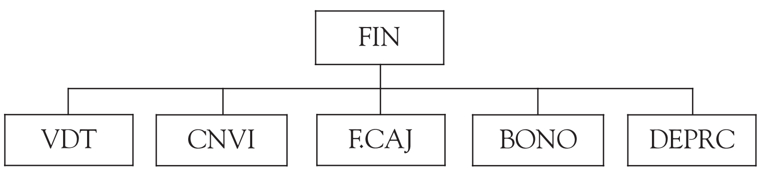
Al encender la calculadora, en la parte inferior de la pantalla aparece el menú principal. Si muestra otro menú, podemos regresar al menú principal pulsando la tecla $\boxed{\text{MAIN}}$. Esta tecla es la segunda función de la tecla $\boxed{\text{EXIT}}$. Para activarla se requiere pulsar primero la tecla de cambio (la tecla dorada) y de inmediato la tecla $\boxed{\text{EXIT}}$.

El menú principal tiene los siguientes submenús:

FIN	COM	SUMA	CALE	RESOL

FIN	Finanzas
COM	Comercial
SUMA	Funciones estadísticas
CALE	Funciones de calendario
RESOL	Módulo para introducir fórmulas propias

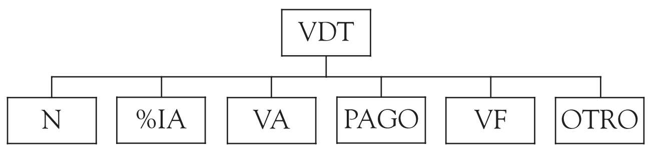
Para entrar en algún menú es necesario apretar la tecla $\boxed{\wedge}$ que está directamente por debajo de la leyenda del menú (o la etiqueta del menú).



Aquí utilizaremos casi exclusivamente el submenú FIN. Para entrar en el menú FIN pulsamos la tecla del menú que está directamente debajo de la etiqueta FIN. El menú FIN contiene los siguientes módulos:

VDT	Valor del dinero en el tiempo
CNVI	Conversión de las tasas de interés
F.CAJ	Flujos de caja
BONO	Valor y rendimiento de los bonos
DEPRC	Cálculo de depreciación

El módulo que utilizaremos con mayor frecuencia es VDT. Al pulsar la tecla de este menú aparecen los siguientes registros:



N	Número de periodos
%IA	Tasa de interés (nominal) anual
VA	Valor presente o valor actual
PAGO	Pago (o retiro) periódico
VF	Valor futuro
OTRO	Submenú para fijar el número de capitalizaciones en el año y calcular la amortización

Usualmente los registros contienen los valores de cálculos anteriores. Para poner ceros en todos los registros es necesario pulsar la tecla CLEAR DATA (tecla dorada e INPUT). Esta observación es muy importante, porque muchos errores son consecuencia de que los registros de memoria contienen datos extraños al problema.

Si al pulsar la tecla VDT en la pantalla aparece 12 NO.P AÑO MODO FINAL, esto es el modo *default* y significa que el interés se capitaliza 12 veces al año y los pagos periódicos se efectúan al final de cada periodo. Si las especificaciones de nuestro problema son diferentes, necesitamos pulsar la tecla OTRO y ajustar tanto el número de capitalizaciones como el modo.

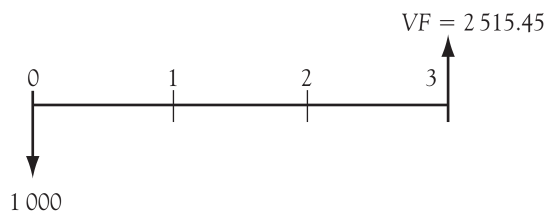
En el ejemplo 1, la capitalización es anual y el modo es final. Para resolver este problema con la calculadora HP 17B se siguen estos pasos:

1. En el menú principal pulsamos la tecla FIN y a continuación VDT. Si la pantalla dice 12 NO.P AÑO MODO FINAL, pulsamos la tecla OTRO, introducimos el número 1 y pulsamos la tecla del menú P.AÑ. Para regresar al módulo VDT pulsamos la tecla EXIT.

2. Pulsamos la tecla CLEAR DATA (tecla dorada e INPUT) para poner en ceros todos los registros y evitar la "contaminación" de la solución con datos de los problemas anteriores.

3. Introducimos con el teclado el número 3 y pulsamos la tecla N, para instruir a la calculadora de que el número de periodos es 3. La pantalla dice N = 3. Acontinuación, introducimos el número 36 y pulsamos la tecla %IA. Finalmente, introducimos el número 1 000 y pulsamos la tecla del menú V.A. La calculadora ya tiene todos los datos necesarios.
4. Para obtener la respuesta pulsamos la tecla V.F. y obtenemos: V.F. = −2 515.45.

El signo negativo de la respuesta se debe a que la calculadora supone que si el flujo de entrada (1 000) es positivo, el flujo de salida tiene que ser negativo. En el ejemplo 1 el caso es el contrario. Primero depositamos $1 000 (flujo de salida) y después de los 3 años los podemos retirar (flujo de entrada). Para lograr los signos correctos, al depósito inicial le damos el signo negativo. Para esto, introducimos 1 000 en la pantalla, pulsamos la tecla de cambio de signo +/− y pulsamos la tecla V.A. Ahora, al pulsar la tecla V.F., obtenemos el resultado correcto: 2 515.45. El ejemplo 1 podemos visualizarlo en el siguiente diagrama de flujo:



Si el depósito inicial de $1 000 fue una salida de efectivo (el signo −), el valor futuro de $2 515.45 es una entrada de efectivo y debe tener el signo (+).

De los tres registros: VA, PAGO, VF, por lo menos uno debe tener un signo negativo.

Del ejemplo 2 resolveremos con la calculadora sólo el punto (*c*). Aquí, la capitalización es diaria y el modo sigue siendo final. Pulsamos la tecla OTRO, introducimos en la pantalla el número 360, pulsamos la tecla P.AÑ y pulsamos la tecla EXIT para regresar al módulo VDT. Si conservamos los datos del ejemplo anterior, lo único que tenemos que cambiar es el número de periodos, que es de 1 080 días. Podemos introducir este número directamente en la pantalla y pulsar la tecla N. Un procedimiento alternativo (recomendado) es introducir el número 3 (años) y antes de pulsar la tecla **N** pulsar la tecla dorada de cambio.[3] La calculadora calcula el número de días y en la pantalla aparece N = 1 080. Ahora ya podemos pulsar la tecla V.F. y obtenemos la respuesta correcta: 2 943.09.

El lector debe usar la calculadora para calcular también los puntos (*a*) y (*b*).

Interés compuesto con plazo fraccionario

La ventaja de la calculadora electrónica sobre las tablas de interés compuesto se aprecia más cuando el periodo no es un número entero. En este caso utilizamos la misma fórmula con un plazo que es una fracción decimal.

[3] La tecla dorada de cambio la vamos a representar con el símbolo □.

EJEMPLO 1

Contratamos un préstamo por $5000, a 2 años, con la tasa anual de 15%, compuesta semestralmente, pero decidimos cancelar el préstamo anticipadamente a los 15 meses. ¿Cuál es la cantidad que debemos liquidar?

$$P_0 = 5000, \quad R = 0.15, \quad t = 2 \text{ años} = 4 \text{ semestres}$$

Solución: El plazo original es de 4 semestres y la tasa de interés semestral es 7.5%.

Con una liquidación anticipada, el plazo es 15 meses o 15/6 = 2.5 semestres.

$$VF_{15} = 5\,000(1.075)^{2.5} = 5990.89$$

Respuesta: Después de 15 meses debemos devolver $5990.89.

Secuencia de pasos en la calculadora:[4]

Teclas	Pantalla	Descripción
OTRO 2 P.AÑ, EXIT	2 NO.P AÑO MODO FINAL	Capitalización semestral
CLEAR DATA	2 NO.P AÑO MODO FINAL	Borramos los registros
1.25 $\boxed{\square}$ N	N = 2.5	Introducimos el periodo
15 %IA	%IA = 15.00	La tasa de interés
5 000 V.A.	V.A. = 5000.00	El monto del préstamo
V.F.	V.F. = −5990.89	La respuesta

La longitud del periodo en años es 1.25. Se obtiene dividiendo 15 entre 12.

A diferencia del interés simple, en el interés compuesto no es lo mismo ajustar el plazo al periodo de interés que ajustar el periodo de interés a las unidades en las que se mide el tiempo. Si hiciéramos lo último, tendríamos:

$$5\,000\left(1+\frac{0.15}{12}\right)^{15} = 6\,024.15 \neq 5\,990.89 = 5\,000\left(1+\frac{0.15}{2}\right)^{15/6}$$

TASA NOMINAL, TASA EFECTIVA Y TASAS EQUIVALENTES

La *tasa nominal de interés*[5] (Rn), también conocida como la tasa contractual o la tasa estipulada, es la tasa anual pactada que rige durante la vida del contrato. El interés efectivo depende no sólo de la tasa nominal, sino también del número de capitalizaciones (composiciones) en el año.[6]

[4] Se supone que ya estamos en el módulo VDT.

[5] La tasa nominal aparece en dos contextos diferentes, lo que puede provocar cierta confusión. En el primer contexto contrastamos la tasa nominal (la tasa en pesos corrientes) con la tasa real (en términos de poder adquisitivo constante). Ahora contrastamos la tasa nominal con la tasa efectiva que, además de la tasa nominal, toma en cuenta el número de capitalizaciones en el año.

[6] El interés depende también de la base que se toma para calcular el interés.

La *tasa efectiva de interés* (Re) es la tasa con la que el principal crece efectivamente durante un año. Es una función de la tasa nominal y de la frecuencia de capitalización, m.

$$\boxed{Re = \left(1 + \frac{Rn}{m}\right)^m - 1}$$

donde Rn es la tasa nominal
Re es la tasa efectiva
m es la frecuencia de capitalización

Cuando la capitalización es anual (m = 1), la tasa efectiva es igual a la tasa nominal.

Sustituyendo $m = 1$ en la fórmula, tenemos:

$$Re = \left[\left(1 + \frac{Rn}{m}\right)^m - 1\right]_{m=1} = \left(1 + \frac{Rn}{1}\right)^1 - 1 = Rn$$

EJEMPLO 1

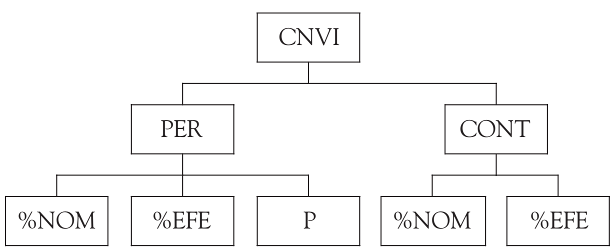
¿Cuál es la tasa de interés efectiva si la tasa nominal de 48% se compone mensualmente?

$$Rn = 0.48, \qquad m = 12$$

$$Re = \left(1 + \frac{Rn}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0.48}{12}\right)^{12} - 1 = 0.601 = 60.1\%$$

Respuesta: Cuando la tasa nominal de 48% se compone mensualmente, la tasa efectiva es de 60.1%.

Para resolver este problema con la calculadora financiera HP 17 BII, utilizamos el submenú CNVI (conversión de las tasas de interés) del menú FIN. La estructura de este submenú viene representada en el siguiente esquema:



Primero pulsamos la tecla del menú CNVI y a continuación la tecla PER (periódica).[7] La pantalla dice CAPITZ.P/VECES AL AÑO. Por debajo se ve el siguiente menú, en el cual introducimos los datos del problema:

%NOM	%EFE	P
48	?	12

Introducimos en la pantalla el número 48 y pulsamos la tecla %NOM. Esto introduce la tasa de interés de 48% en el registro de la tasa nominal. De manera semejante introducimos 12 en el registro P (número de capitalizaciones al año). Ahora, al pulsar la tecla del menú %EFE, obtenemos la respuesta correcta: 60.10%.

EJEMPLO 2

¿Cuál es la tasa efectiva si el rendimiento nominal de los Cetes a 28 días es de 21.5%?

$$Rn = 21.5\%, \qquad m = 360/28 = 12.8571$$

$$Re = \left(1+\frac{Rn}{m}\right)^m - 1 = \left[1+\frac{0.215}{\left(\frac{360}{28}\right)}\right]^{\frac{360}{28}} - 1 = 0.23766$$

Respuesta: El rendimiento efectivo de los Cetes a 28 días es de 23.77%.

EJEMPLO 3

¿Cuál es la tasa nominal compuesta trimestralmente que produce un rendimiento efectivo anual de 20%?

Solución: Aquí tenemos que despejar *Rn* de la siguiente ecuación:

$$\left(1+\frac{Rn}{4}\right)^4 = 1 + 0.2 = 1.2$$

$$Rn = (1.2^{1/4} - 1)\,4 = 0.1865 = 18.65\%$$

Respuesta: Si la tasa nominal de 18.65% es compuesta trimestralmente, producirá un rendimiento anual de 20%.

[7] El submenú CONT (continua) lo explicaremos más adelante.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Paradoja

¡La tasa efectiva puede ser menor que la tasa nominal! Esto sucede cuando el interés se calcula una vez al año y el periodo es más corto que un año.

Supongamos que $R = 20\%$ anual y el periodo es $t = 3$ meses $= 0.25$ años. En escala de 3 meses, la tasa nominal es de $20(0.25) = 5\%$. En cambio la tasa efectiva es $1.2^{0.25} - 1 = 4.66\%$.

Para resolver el ejemplo 3 en la calculadora financiera, entramos en el menú CNVI y seguimos esta secuencia de pasos:

Teclas	Pantalla	Descripción
PER	CAPITZ.P/VECES AL AÑO	Capitalización periódica
20 %EFE	%EFE = 20.00	Introducimos la tasa nominal
4 P	P = 4	Número de capitalizaciones
%NOM	%NOM = 18.65	La respuesta

Dos tasas son equivalentes si comparten la misma tasa efectiva.

Dos tasas de interés nominales con diferentes periodos de capitalización, que en un año producen el mismo rendimiento, se llaman *tasas equivalentes*.

En el ejemplo 1, la tasa nominal de 48% compuesta mensualmente es *equivalente* a la tasa nominal de 60% compuesta anualmente.

Si la tasa nominal 1, $Rn1$, con la frecuencia de composición a, produce la misma tasa efectiva que la tasa nominal 2, $Rn2$, con la frecuencia de composición b, las dos tasas son equivalentes.

$$Rn1\Big|_{m=a} \quad \Rightarrow \quad Re \quad \Leftarrow \quad Rn2\Big|_{m=b}$$

De manera formal:

$$\text{Si } \left(1 + \frac{Rn1}{a}\right)^a = \left(1 + \frac{Rn2}{b}\right)^b \text{, entonces } Rn1 \text{ es equivalente a } Rn2.$$

EJEMPLO 4

¿Cuál es la tasa nominal compuesta trimestralmente equivalente a una tasa nominal de 25% compuesta diariamente?

Solución: Las dos tasas nominales resultan en la misma tasa efectiva. Para resolver este problema tenemos que contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la tasa efectiva si la tasa nominal de 25% se compone diariamente?
2. ¿Cuál es la tasa nominal que produce dicha tasa efectiva si la composición es trimestral?

El lado izquierdo de la ecuación que sigue contesta la pregunta 1 y el lado derecho la pregunta 2:

$$\left(1+\frac{0.25}{360}\right)^{360}=\left(1+\frac{R}{4}\right)^{4}$$

Resolviendo esta ecuación respecto a *Rn* obtenemos la solución: *Rn* = 25.79%

$$Rn = 25\%\Big|_{m=360} \Rightarrow Re = 28.39\% \Leftarrow Rn = 25.79\%\Big|_{m=4}$$

El módulo CNVI se presta muy bien para resolver este tipo de problemas. La siguiente tabla presenta los pasos necesarios para llegar a la solución:

Teclas	Pantalla	Descripción
FIN, CNVI, PER	CAPITZ.P/VECES AL AÑO	Capitalización periódica
25 %NOM	%NOM = 25.00	Introducimos la tasa nominal
360 P	P = 360.00	Capitalización diaria
%EFE.	%EFE = 28.39	La tasa efectiva
4 P	P = 4.00	Capitalización trimestral
%NOM	%NOM = 25.79	La respuesta

Respuesta: La tasa nominal de 25.79% compuesta trimestralmente es equivalente a la tasa de 25% compuesta diariamente.

EJEMPLO 5

¿Cuál es la tasa de rendimiento de los Cetes a 28 días, equivalente al rendimiento nominal de 22.96% de los Cetes a 350 días?

Solución: Las dos tasas nominales resultan en la misma tasa efectiva. Para resolver este problema tenemos que contestar las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la tasa efectiva si la tasa nominal de 22.96% se compone cada 350 días?

Introducimos 22.96 en %NOM, y 360/350 = 1.0286 en P. Al pulsar la tecla %EFE, obtenemos la respuesta: 23.0284.

2. ¿Cuál es la tasa nominal que produce dicha tasa efectiva si la composición se efectúa cada 28 días?

Introducimos 360/28 = 12.8571 en P. Al pulsar la tecla %NOM, obtenemos la respuesta: 20.8925.

Respuesta: El rendimiento de los Cetes a 28 días, equivalente al rendimiento nominal de 22.96% de los Cetes a 350 días, es de 20.89%.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

¿Cuál es la tasa de rendimiento de los Cetes a 350 días, equivalente al rendimiento de 21.78% de los Cetes a 91 días?

Respuesta: 23.5449%.

El problema de la tasa efectiva (o equivalente) surge también si, por alguna razón, se selecciona incorrectamente la base para calcular el interés. Esto sucede cuando se cobra el interés en forma anticipada, o cuando el interés no se calcula sobre los saldos sino sobre el principal original. Este tipo de procedimiento sirve para disfrazar el valor real de la tasa de interés.

EJEMPLO 6

Un prestamista nos presta $1 000 a un año a 20%, pero quiere cobrar el interés por anticipado. ¿Qué tasa de interés está implícita en este contrato?

Solución: El prestamista nos cobra $200 de intereses por anticipado, esto es, nos entrega tan sólo $800. Es necesario despejar R de la siguiente ecuación:

$$800(1 + R) = 1\,000$$

de donde:

$$R = 0.25 = 25\%$$

200 representa el 25% de 800 (pero el 20% de 1 000)

Respuesta: El prestamista nos cobra en realidad una tasa de 25% anual.

Observación: El 20% que dice el prestamista que nos cobra *no es* la tasa de interés, sino la tasa de descuento bancario, R_D. La tasa de interés, R, es:

$$R = \frac{R_D}{1 - R_D} = \frac{0.2}{1 - 0.2} = 0.25 = 25\%$$

En vista de lo anterior, el descuento bancario se llama a veces *interés por adelantado.*

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

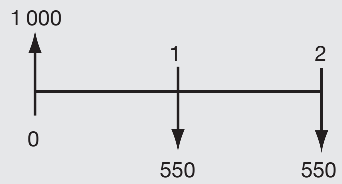
¿Cuál es la tasa mensual al vencimiento equivalente a la tasa anticipada de 4%?

Respuesta: 4.1667%.

EJEMPLO 7

Un prestamista nos presta $1 000 a un año al 10%, pero exige la liquidación de la deuda en dos pagos iguales de $550. ¿Qué tasa de interés está implícita en este contrato?

Solución: Podemos visualizar la situación en un diagrama de tiempo.



El diagrama presenta una anualidad, tema que trataremos más adelante. Sin embargo, resolveremos este problema aquí, porque ilustra muy bien tanto el concepto del valor del dinero en el tiempo como el de las tasas equivalentes. Para hacerlo, necesitamos despejar la tasa de interés de la siguiente ecuación:

$$1\,000 = \frac{550}{1+R} + \frac{550}{\left(1+R\right)^2}$$

La tasa de interés compatible con esta ecuación es 6.5965% semestral, o sea, 13.19% anual.

Respuesta: En realidad, el prestamista nos cobra una tasa de 13.19% anual.

En el módulo VDT de la calculadora financiera introducimos los siguientes valores:

2 NO.P AÑO, MODO FINAL

N	%IA	VA	PAGO	VF
2	?	1 000	–550	0

Al pulsar la tecla %IA, obtenemos la respuesta: 13.19.

Aquí la tasa que realmente nos cobran es mayor que la tasa contractual, porque la verdadera base es menor de lo que sugiere el contrato. Nuestra tenencia de dinero durante el año es en promedio $725: $1 000 en el primer semestre y tan sólo $450 en el segundo.

Si la tasa nominal de 13.19% se capitaliza dos veces al año, la tasa efectiva es de 13.63%. El 13.63% de $725 es $98.8, la cantidad cercana a $100 que nos cobra el prestamista.

Supongamos ahora que en el ejemplo 10 el prestamista nos pide liquidar tu deuda en 12 pagos iguales de 91.67, pagaderos al final de cada mes (1 100/12).[8] En este caso, la tasa nominal

[8] Otro caso de anualidad.

que realmente te cobra es de 17.97% y la tasa efectiva es de 19.53%, casi el doble de lo que dice que está haciendo.

Para lograr este resultado en la calculadora introducimos los siguientes datos:

12 P.AÑ, MODO FINAL, N = 12, VA = 1 000, PAGO = −91.67

Al pulsar la tecla %IA, obtenemos la respuesta: 17.97.

MULTIPLICACIÓN DEL CAPITAL

En algunas circunstancias interesa saber, dada la tasa de interés, en cuánto tiempo se multiplica el capital o cuál es la tasa de interés que multiplica el capital en un periodo específico.

EJEMPLO 1

¿A qué tasa nominal, compuesta mensualmente, un capital de $ 1 000 crecerá hasta $ 3 000 en 2 años?

Solución: En este ejemplo, el capital se triplica. Para encontrar la tasa de interés tenemos que despejarla de la siguiente ecuación:

$$\left(1+\frac{Rn}{12}\right)^{12\times 2}=3$$

$$Rn = (3^{1/24} - 1) \times 12 = 0.5621 = 56.21\%$$

Respuesta: Para que el capital se triplique se requiere la tasa de 56.21%, compuesta mensualmente.

En la calculadora financiera introducimos los siguientes datos:

12 NO.P AÑO, MODO FINAL, CLEAR DATA

N	%IA	VA	PAGO	VF
24	?	–1 000	0	3 000

Al pulsar la tecla %IA, obtenemos la respuesta: 56.2073.

Reflexión sobre matemáticas financieras

La regla de 72

Cuando no había calculadoras electrónicas de bolsillo, los científicos desarrollaban reglas prácticas que permitían una aproximación de cálculos complicados. Una de las más conocidas era la regla de 72: si dividimos 72 entre la tasa de interés, obtendremos el número de años que se requieren para que una inversión se duplique.

Crecimiento continuo:

$$e^{Rt} = 2 \Rightarrow Rt = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{R} = \frac{0.6930}{R} \approx \frac{70}{R\%}$$

En el caso de crecimiento continuo, la regla debía llamarse *regla de 70*.

Crecimiento discreto:

$$\left(1+R\right)^t = 2 \Rightarrow t\ln\left(1+R\right) = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln\left(1+R\right)} = \frac{\dfrac{R\cdot\ln 2}{\ln\left(1+R\right)}}{R} \approx \frac{72}{R\%}$$

$$\left.\frac{R\cdot\ln 2}{\ln\left(1+R\right)}\right|_{R=8\%} = 0.72 \Rightarrow \frac{72}{R\%} = t$$

Con un poco de experimentación numérica llegamos a la siguiente conclusión:

Si $R < 3\% \Rightarrow$ Regla de 70

Si $R \approx 5\% \Rightarrow$ Regla de 71

Si $R \approx 8\% \Rightarrow$ Regla de 72

Para las tasas de interés altas, la regla de 72 no funciona.

EJEMPLO 2

Si invierte 1 000 en Udis a una tasa anual de 6%, ¿en cuántos años tendrá 2 000 Udis?

Solución:

$$t = 72/6 = 12$$

Respuesta: El capital invertido al 6% anual se duplica en 12 años.

Método exacto

La regla práctica de 72 funciona bastante bien si las tasas de interés no son muy altas. Cuando las tasas rebasan 15%, el error se vuelve cada vez más grande. En estos casos es necesario hacer un cálculo exacto, aplicando la fórmula siguiente:

$$(1 + R)^t = 2$$

$$t \log(1 + R) = \log(2)$$

$$\boxed{t = \frac{\log(2)}{\log(1+R)}}$$

Cuando $R = 6\%$, $t = \log 2/\log(1.06) = 11.896$. La aproximación con la regla de 72 resulta aceptable.

Cuando $R = 36\%$, $t = \log 2/\log(1.36) = 2.25$. Con la regla de 72 obtendríamos 2 años, una aproximación inexacta.

EJEMPLO 3

Si el capital se duplica en 15 años, ¿cuál es la tasa de rendimiento?

Solución:

1) Método de 72

$$R = 72/t_d = 72/15 = 4.8\%$$

2) Método exacto:

$$(1 + R)^t = 2$$

$$1 + R = 2^{1/t}$$

$$\boxed{R = 2^{\frac{1}{t}} - 1}$$

$$R = 2^{1/15} - 1 = 0.0473 = 4.73\%$$

Respuesta: El capital se duplica en 15 años, si la tasa de interés es de 4.73%.

En la calculadora financiera, introducimos los siguientes datos:

1 NO.P AÑO, MODO FINAL, CLEAR DATA

N	%IA	VA	PAGO	VF
15	?	–1	0	2

Al pulsar la tecla %IA, obtenemos la respuesta: 4.7294.

MÉTODO DE PUNTOS FINALES Y PROMEDIO GEOMÉTRICO

Cuando tenemos dos valores de la misma variable en dos momentos del tiempo, podemos calcular la tasa de crecimiento de la variable como un *promedio geométrico*.

EJEMPLO 1

Las ventas de IBM subieron de 50.7 mmd (miles de millones de dólares) en 1985 a 65.3 mmd en 1992. ¿Cuál fue la tasa de crecimiento promedio de las ventas en estos 7 años?

Solución: $V_{92} = V_{85}(1 + R)^7$

$$R = \left(\frac{V_{92}}{V_{85}}\right)^{\frac{1}{7}} - 1 = \left(\frac{65.3}{50.7}\right)^{\frac{1}{7}} - 1 = 0.0368 = 3.68$$

Respuesta: Las ventas de IBM crecían a un ritmo promedio de 3.68% anual.[9]

Secuencia en la calculadora financiera:

1 P.AÑ, MODO FINAL, N = 7, VA = −50.7, PAGO = 0, VF = 65.3

Al pulsar la tecla %IA, obtenemos la respuesta: 3.6814.

De una manera general, si X_t es el valor de la variable en el punto final, X_0 es el valor inicial y t es el número de periodos de crecimiento, la tasa de crecimiento exponencial (promedio geométrico) g es igual a:

$$\boxed{g = \left(\frac{X_t}{X_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1}$$

EJEMPLO 2

La población de México creció de 35 millones en 1960 a 95 millones en 1997. ¿Cuál fue la tasa de crecimiento promedio en estos 37 años?

Solución: $P_{97} = P_{60}(1 + R)^{37}$

$$R = \left(\frac{P_{97}}{P_{60}}\right)^{\frac{1}{37}} - 1 = \left(\frac{95}{35}\right)^{\frac{1}{37}} - 1 = 0.0274 = 2.74\%$$

Respuesta: Entre 1997 y 1960 la población de México estaba creciendo a un ritmo anual promedio de 2.74%.

Con esta tasa de crecimiento, la población se duplica cada 25.6 años. Si se mantuviera este ritmo, en 2023 la población sería de 190 millones de personas.

[9] Esta tasa de crecimiento se calculó como el promedio geométrico. Si la calculásemos como un promedio aritmético, sería: $\frac{1}{7}\left(\frac{65.3}{50.7} - 1\right) = 0.0411 = 4.11\%$. En la mayoría de los casos el método del promedio aritmético exagera la tasa de crecimiento.

Otro uso de la fórmula del valor futuro (el crecimiento discreto) es *anualización de la inflación mensual.*

EJEMPLO 3

En el mes de junio el INPC (índice nacional de precios al consumidor) subió 3%. ¿Cuál sería la inflación anual, si la inflación que prevaleció en junio se mantuviera todo el año? $i_m = 3\%$ es la inflación mensual, i_a es la inflación anual.

Solución: $$1 + i_a = (1 + i_m)^{12} = (1.03)^{12} = 1.4258$$

Respuesta: La inflación anual sería de 42.58%.

Para anualizar la inflación mensual se usa el interés compuesto, porque en cada mes la inflación se aplica a los precios del mes inmediatamente anterior. Cada mes los precios se multiplican por $(1 + i_m)$. Si el nivel inicial de precios es de 100 y la inflación mensual es de 3%, después de tres meses el nivel de precios será:

$$100(1.03)(1.03)(1.03) = 100(1.03)^3 = 109.27$$

Observación: Ante el problema del ejercicio 3, la mayoría de las personas dirían que la inflación anual sería de 36% ($12 \times 3\%$), lo que constituye un error muy grave si la inflación anual es de dos o tres dígitos.

EJEMPLO 4

El INPC creció de 103.25 en diciembre de 1994 a 231.89 en diciembre de 1997.

a) Calcule la inflación acumulada en el periodo 1994-1997 (3 años).

b) ¿Cuál fue la inflación anual promedio en ese periodo?

Solución:

a) $$i_{1994\text{-}1997} = \left(\frac{INPC_{\text{Dic.97}}}{INPC_{\text{Dic.94}}} - 1\right) \times 100 = \left(\frac{231.89}{103.25} - 1\right) \times 100 = 124.59\%$$

b) $$(1 + i_a)^3 = \left(\frac{231.89}{103.25}\right) \Rightarrow i_a = \left[\left(\frac{231.89}{103.25}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right] \times 100 = 30.96\%$$

Respuesta:

a) La inflación acumulada durante los tres años 1994-1997 fue de 124.59%. Esto significa que los precios subieron en promedio 2.25 veces.

b) La inflación anual promedio durante ese periodo fue de 30.96%.

Observación: Sería un error muy grave calcular la inflación anual como un promedio aritmético: $124.59/3 = 41.53\%$. El promedio aritmético sobreevalúa la tasa de crecimiento cuando el crecimiento es exponencial.

Si en el ejemplo 4 quisiéramos calcular la tasa de inflación mensual promedio durante los tres años, también la calcularíamos como el promedio geométrico:

$$i_m = \left[\left(\frac{231.89}{103.25}\right)^{\frac{1}{36}} - 1\right] \times 100 = 2.27\%$$

EJEMPLO 5

La inflación acumulada en enero-abril es de 6.73%. ¿Cuál sería la inflación anual si en lo que resta del año la inflación mensual promedio fuera de 1.1%?

Solución: $1 + i_a = 1.0673\ (1.011)^8 = 1.1649$

Respuesta: La inflación anual sería de 16.49%.

EJEMPLO 6

Utilizando los datos del ejemplo 5, ¿cuál debe ser la inflación mensual promediá en lo que resta del año, para que se cumpla el objetivo del gobierno de una inflación anual de 15%?

Solución: Tenemos que despejar i_m de la siguiente ecuación:

$$1.15 = 1.0673\ (1 + i_m)^8$$

$$1 + i_m = 1.0775^{0.125} = 1.00937$$

Respuesta: La inflación mensual promedio debe ser de 0.937%.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

La inflación en enero de 1999 fue de 2.53%. ¿Cuál debe ser la inflación mensual promedio en los restantes meses del año, si ha de cumplirse la meta del Banco de México de la inflación anual de 13%.

Respuesta: 0.8878%.

Cuando se estima el rendimiento real de un instrumento a plazo hay que comparar el rendimiento nominal de este instrumento con la inflación esperada en el periodo de su vigencia.

EJEMPLO 7

Un pagaré a 30 días tiene una tasa de 48% anual. La inflación esperada para el mes siguiente es igual al 3.5%. ¿Cuál es el rendimiento anual real del pagaré?

R = 48% anual o 4% mensual, $E(i) = 3.5\%$, $r = ?$

Solución: Utilizamos la fórmula para la tasa de rendimiento real:

$$r = \frac{R - i}{1 + i} = \frac{0.04 - 0.035}{1 + 0.035} = 0.0048$$

Para anualizar este rendimiento, tenemos dos opciones:

tasa anual nominal: $0.0048 \times 12 = 0.058 = 5.8\%$

tasa anual efectiva: $(1.0048)^{12} - 1 = 0.0595 = 5.95\%$

Respuesta: El rendimiento anualizado real (efectivo) del pagaré es de 5.95%.

Observación: El proceso de anualización se basa en el supuesto de que tanto la inflación mensual como el rendimiento de pagarés a un mes se mantendrán constantes durante los próximos 12 meses. Si este supuesto es válido, otra manera de resolver el ejemplo 11 es anualizar la tasa de la inflación $(1.0035)^{12}$, calcular la tasa de rendimiento anual efectiva $(1.04)^{12}$ y aplicar la relación de Fisher para obtener el rendimiento real anual (efectivo).

En la práctica muchos inversionistas simplemente restarían de la tasa de rendimiento nominal la tasa de la inflación y multiplicarían la diferencia por 12. El resultado es: $(0.04 - 0.35)12 = 0.06 = 6\%$. El resultado no es muy diferente del que obtuvimos con un método exacto.

EJEMPLO 8

Según las estimaciones, la inflación en 1997 será de 17%. La inflación mensual en mayo fue de 0.98%. En ese mismo mes un pagaré bancario a 30 días ofrecía una tasa anual de 15%. ¿Cuál es el rendimiento anual real del pagaré?

$R = 15\%$ anual o 1.25% mensual, $E(i) = 0.98\%$, $r = ?$

Solución: Utilizamos la fórmula para la tasa de rendimiento real:

$$r = \frac{R - i}{1 + i} = \frac{0.0125 - 0.0098}{1 + 0.0098} = 0.0027$$

tasa anual nominal: $0.0027 \times 12 = 0.0321 = 3.21\%$

tasa anual efectiva: $(1.0027)^{12} - 1 = 0.0326 = 3.26\%$

Respuesta: El rendimiento anualizado real (efectivo) del pagaré es de 3.26%.

Observación: Muchas personas, al comparar el rendimiento nominal (15%) con la tasa de inflación esperada (17%), creen que el rendimiento es negativo en términos reales (−2%). Esto se debe a un uso indebido de los promedios. La inflación promedio en 1997 será de 17%, pero este promedio se debe a una alta inflación en los primeros meses del año y una baja inflación después. Si ya estamos en mayo, no nos interesa la inflación pasada de enero a abril. Lo único que nos interesa es la inflación en el periodo de tenencia del instrumento (el mes de mayo).

Otro error consiste en comparar la tasa efectiva de la inflación con la tasa nominal del pagaré. Dado que se trata de un pagaré de 30 días, el número de capitalizaciones en el año es 12. La tasa efectiva del pagaré es de 16.08%.

El ejemplo 8 llama la atención sobre dos reglas metodológicas:

1. Al calcular el rendimiento real de un instrumento es necesario tomar la tasa de inflación del periodo de tenencia del instrumento.
2. La inflación anual se calcula como una tasa efectiva. Para compararla con el rendimiento de los instrumentos financieros tenemos que convertir el rendimiento nominal de dichos instrumentos en el rendimiento efectivo.

EJEMPLO 9

En enero de 1998 se espera que la inflación anual sea de 14%. Sin embargo, la inflación mensual en enero fue de 2.18%. En ese mismo mes el rendimiento de los Cetes a 28 días fue de 18%. ¿Cuál fue el rendimiento anual real del Cete?

$$R = 18\% \text{ anual o } 1.5\% \text{ mensual}, \qquad i = 2.18\%, \qquad r = ?$$

Solución: Utilizamos la fórmula para la tasa de rendimiento real:

$$r = \frac{R - i}{1 + i} = \frac{0.015 - 0.0218}{1 + 0.0218} = -0.0067$$

tasa anual nominal: $-0.0067 \times 12 = -0.0799 = -7.99\%$

tasa anual efectiva: $(0.9933)^{12} - 1 = -0.077 = -7.7\%$

Respuesta: En el mes de enero el rendimiento real del Cete fue de −7.99% anual.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

La inflación esperada para 1999 es de 16%. Un certificado de depósito a un mes, comprado el primero de enero, tiene un rendimiento anual de 25%. ¿Cuál fue el rendimiento real (anualizado) del pagaré si la tasa de inflación en este mes fue de 2.53%?

Respuesta: −5.23%.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Promedio aritmético-promedio geométrico

Si la inflación anual es de 24%, ¿cuál es la inflación mensual promedio?

Un método incorrecto de contestar a esta pregunta es utilizando el *promedio aritmético*:

$$0.24/12 = 0.02 = 2\%$$

Un método correcto consiste en calcular el *promedio geométrico*:

$$(1 + 0.24)^{1/2} - 1 = 0.0181 = 1.81\%$$

La inflación mensual hay que calcularla como un promedio geométrico, porque los precios crecen de un mes al otro según el interés compuesto:

$$1 + i_a = (1 + i_m)^{12}$$

donde: i_a es la tasa de la inflación anual

i_m es la tasa de la inflación mensual

Cuando una cantidad crece según el interés compuesto, el promedio aritmético sobrestima la tasa de crecimiento promedio.

En general, la media geométrica se usa para promediar porcentajes, índices, relaciones, así como para calcular la tasa de crecimiento histórica. La media geométrica tiene dos propiedades:

1. Es menos sensible a los valores extremos que la media aritmética:

Ejemplo:

$$\frac{1}{5}(1.5 + 1.8 + 2.2 + 2.5 + 10) = 3.6$$

$$(1.5 \times 1.8 \times 2.2 \times 2.5 \times 10)^{\frac{1}{5}} = 2.71$$

2. El recíproco de la media geométrica de n números es igual a la media geométrica de los recíprocos de los números.

$$(2 \times 3 \times 5)^{\frac{1}{3}} = 3.1072 \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = 0.3218 = \frac{1}{3.1072}$$

En el caso de la media aritmética, esto no es cierto:

$$\frac{2 + 3 + 5}{3} = 3.3333 \quad \text{y} \quad \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = 0.3444 \neq \frac{1}{3.3333}$$

Gracias a esta propiedad, la media geométrica es adecuada para promediar las relaciones.

La media geométrica es igual a la media aritmética sólo si los valores promediados no muestran ninguna variabilidad. En todos los demás casos la media geométrica es menor. Si los valores promediados tienen una distribución normal, la siguiente fórmula aproxima la relación entre las dos medias: $R_G \approx R_A - \frac{1}{2}\sigma^2$

COMPOSICIÓN CONTINUA

Cuando la frecuencia de composición se aproxima al infinito, la fórmula general del interés compuesto puede modificarse para reflejar un crecimiento continuo. El crecimiento continuo es un crecimiento a una tasa cuya frecuencia de composición es infinita. El interés se capitaliza continuamente.

Para derivar la fórmula de la composición continua empezamos con la fórmula del interés compuesto, con la frecuencia de capitalización m:

$$P_t = P_0\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mt}$$

Esta fórmula también la podemos escribir como:

$$P_t = P_0\left[\left(1+\frac{R}{m}\right)^{m}\right]^{t}$$

Cuando $m \to \infty$ (m tiende al infinito), el límite de la expresión entre corchetes es:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{R}{m}\right)^{m} = e^{R}$$

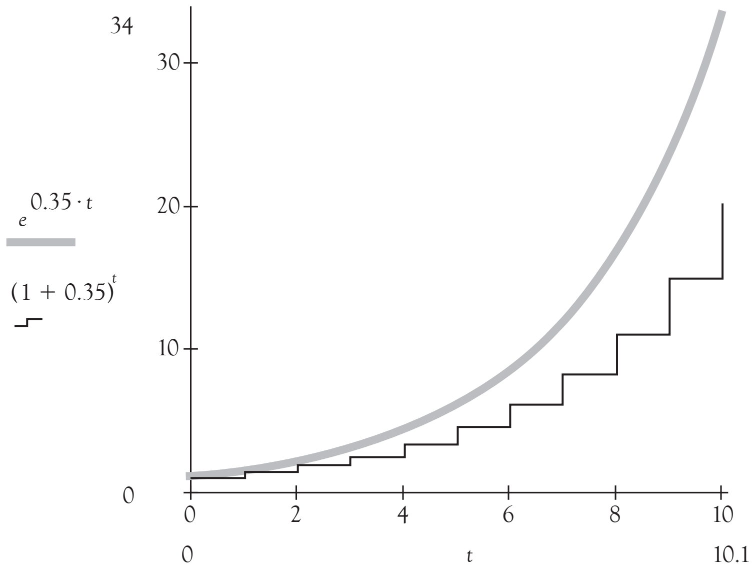
donde: $e = 2.718\ldots$ es una constante, la base de los logaritmos naturales.

Así, cuando la frecuencia de composición es infinita (continua), la fórmula del interés compuesto se convierte en:

$$\boxed{P_t = P_0 e^{Rt}}$$

Figura 4.2

$P_0 = 1$, $R = 35\%$, $t = 10$. La gráfica de la función exponencial continua arriba no tiene escalones y crece más rápidamente que la función discreta.



EJEMPLO 1

Compare las tasas efectivas, cuando la tasa nominal de 15% es compuesta: *a*) mensualmente, *b*) continuamente.

Solución: *a*) $Re(\text{mensual}) = (1 + 0.15/12)^{12} - 1 = 0.1608 = 16.08\%$

b) $Re(\text{continua}) = e^{0.15} - 1 = 0.1618 = 16.18\%$

Observación: Cuando la composición es frecuente (por ejemplo, mensual), la diferencia entre los resultados que producen las fórmulas discreta y continua no es significativa.

La tasa efectiva con la capitalización continua es la más alta. La diferencia entre la tasa efectiva y la tasa nominal crece muy rápidamente cuando aumentamos la frecuencia de capitalización de 1 a 4. Incrementos posteriores de la capitalización generan incrementos decrecientes de la tasa efectiva. La tasa efectiva con capitalización diaria es casi igual a la tasa efectiva con capitalización continua. La figura 4.3 ilustra este concepto.

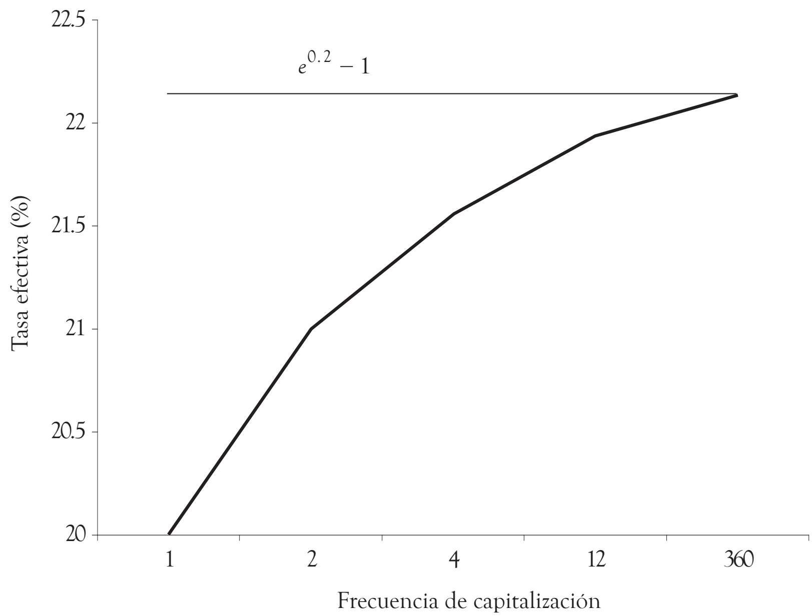
En la calculadora financiera HP 17BII, para efectuar la operación $e^{0.15}$ seguimos estos pasos:

1. Entramos en el menú MATH (pulsar la tecla dorada y $\boxed{\%}$) que nos ofrece las siguientes funciones:

LOG	10^X	LN	EXP	N!	PI

Figura 4.3

Tasa de interés efectiva en función de la frecuencia de capitalización. Tasa nominal de 20%.



2. Introducimos 0.15 en la pantalla y a continuación pulsamos la tecla del menú $\boxed{\text{EXP}}$.

   En la pantalla aparece la respuesta, 1.1618.

Una manera alternativa de calcular la tasa de interés efectiva, cuando la tasa nominal de 15% se compone continuamente, es con el módulo CNVI: FIN, CNVI, CONT, 15 %NOM

Al pulsar la tecla %EFE, obtenemos la respuesta: 16.18.

En las finanzas avanzadas se utiliza el crecimiento y el descuento continuo, ya que las fórmulas continuas son más fáciles de manipular, sobre todo cuando se trata de derivación e integración. Además, cuando la capitalización es frecuente, la fórmula continua da casi el mismo resultado que la fórmula discreta. La frecuencia de capitalización debe ser congruente con la frecuencia de depósitos y retiros. Con la popularización de la banca electrónica, en la cual los depósitos y retiros pueden efectuarse en cualquier momento, crece la importancia de las fórmulas continuas.

Relación entre las tasas de interés discretas y continuas

Sean: d la tasa discreta (abreviación de r_d)

c la tasa continua (abreviación de r_c)

$$(1+d)^t = \left(e^c\right)^t \qquad \Rightarrow \qquad 1 + d = e^c$$

$$\boxed{\log(1 + d) = c \qquad \text{o} \qquad d = e^c - 1}$$

EJEMPLO 2

¿Qué tasa discreta, compuesta anualmente, es equivalente a una tasa continua de 15%?

Solución: $d = e^c - 1 = e^{0.15} - 1 = 0.1618 = 16.18\%$.

Respuesta: La tasa discreta de 16.18% produce el mismo crecimiento que la tasa continua de 15%.

EJEMPLO 3

¿Qué tasa continua es equivalente a una tasa discreta de 12%?

Solución: $\ln(1.12) = 0.1133 = 11.33\%$[10]

Respuesta: La tasa continua de 11.33% produce el mismo crecimiento que la tasa discreta de 12%.

[10] En este libro se usan sólo los logaritmos naturales. Los operadores log y ln son equivalentes.

FÓRMULAS DEL CAPÍTULO

Valor futuro con el interés compuesto $P_t = P_0\,(1 + R)^t$	Valor presente con el interés compuesto $P_0 = \dfrac{P_t}{(1+R)^t}$
Valor futuro con composición *m* veces al año $P_t = P_0\left(1+\dfrac{R}{m}\right)^{mt}$	Tasa efectiva con composición *m* veces al año $Re = \left(1+\dfrac{Rn}{m}\right)^{m} - 1$
Periodo de duplicación del capital $t = \dfrac{\log(2)}{\log(1+R)}$	Tasa de crecimiento promedia $g = \left(\dfrac{X_t}{X_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$
Valor futuro con composición continua $P_t = P_0 e^{Rt}$	Valor presente con composición continua $P_0 = \dfrac{P_t}{e^{Rt}} = P_t\,e^{-Rt}$

Términos clave

Anualización de la inflación mensual
Capitalización de intereses
Crecimiento exponencial continuo
Crecimiento exponencial discreto
Interés anticipado
Frecuencia de conversión
Método de puntos finales
Multiplicación del capital
Periodo de interés
Poder del interés compuesto
Promedio geométrico
Regla de 72
Rendimiento real
Tasa efectiva
Tasas equivalentes
Usura

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. ¿Cuál será el valor de una cuenta de 100 Udis en 7 años, si la tasa de interés es de 5.5% anual, compuesta anualmente?
2. ¿Cuál sería la respuesta al problema 1 con la capitalización mensual?
3. Un depósito de $150 produce 15% compuesto anualmente, ¿cuál será el valor del depósito después de 27 meses?
4. El Instituto Tecnológico tiene 2 500 alumnos. La matrícula crece a un ritmo de 11% anual.
   a) ¿Cuántos alumnos tendrá en 5 años?
   b) ¿En cuántos años se duplicará la matrícula?

5. ¿Qué vale más: \$1 000 hoy o \$3 000 en 3 años, si la mejor opción de inversión que tenemos rinde 30% anual, compuesto mensualmente?
6. Tiene un certificado de depósito de \$1 000 a 90 días que rinde 40%, compuesto mensualmente. Desea retirar su dinero después de 40 días (suponiendo que no hay castigo por un retiro anticipado). ¿Cuánto dinero recibirá?
7. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva si la tasa nominal de 60% se compone *a*) mensualmente *b*) diariamente?
8. ¿Cuál es la tasa efectiva de un Cete a 28 días que rinde 17.4% (anual nominal)?
9. ¿Cuál es la tasa equivalente de un Cete a 182 días a la del Cete del problema 8?
10. ¿Cuál es la tasa nominal convertible mensualmente que produce un rendimiento efectivo anual de 60%?
11. ¿Cuál es la tasa nominal compuesta mensualmente, equivalente a la tasa nominal de 23%, compuesta semestralmente?
12. ¿Cuál es la tasa nominal compuesta diariamente, equivalente a la tasa nominal de 27%, compuesta trimestralmente?
13. ¿Cuál es la tasa efectiva, si la tasa mensual de 5% se cobra por anticipado?
14. Un amigo le presta \$100 que tiene que devolver en 3 pagos cuatrimestrales de \$40. El amigo dice que le está cobrando 20% anual. ¿Qué tasa anual le está cobrando verdaderamente?
15. ¿En cuánto tiempo se duplicará el capital, si la tasa de interés es de 14.5%?
16. ¿Cuál sería la respuesta a la pregunta 15 si la tasa de interés del problema se capitalizara mensualmente?
17. ¿Cuál es la tasa de rendimiento de una cuenta que garantiza la duplicación de capital cada 12 años?
18. Si invierte \$20 000 a 15%, convertible anualmente, ¿en cuánto tiempo tendrá \$100 000?
19. Un proyecto de inversión promete una triplicación del capital en 12 años. ¿Cuál es la tasa de rendimiento implícita en este proyecto?
20. Las ventas de una empresa subieron de 100 a 250 en 3 años. ¿Cuál fue la tasa de crecimiento anual de las ventas?
21. Durante una década, la población de un país creció de 85 millones a 100 millones. ¿Cuál fue la tasa de crecimiento anual de la población durante esta década?
22. $\text{INPC}_{\text{junio 1993}} = 93.27$. $\text{INPC}_{\text{diciembre 1997}} = 231.85$.
    a) Calcule la inflación acumulada en este periodo
    b) Calcule la inflación mensual promedio en el periodo mencionado
23. Si la inflación mensual de 2.5% se mantiene todo el año, ¿cuál será la tasa anual de la inflación?
24. $i_{\text{enero 98}} = 2.18\%$, $i_{\text{febrero 98}} = 1.21\%$.
    a) Calcule la inflación acumulada en el primer bimestre de 1998
    b) Si la inflación del primer bimestre se mantuviera todo el año, ¿cuál sería la inflación anual en 1998?
    c) ¿Cuál debe ser la inflación mensual promedio en los restantes meses del año, si ha de cumplirse la meta de la inflación anual de 14%?
25. En el periodo enero-julio de 1998 la inflación acumulada es de 9.32%. ¿Cuál debe ser la inflación en los restantes 5 meses del año para que se cumpla el objetivo de la inflación anual de 14%?
26. Un título produjo un rendimiento efectivo anual de 50%. En ese mismo año, la inflación fue de 40%. ¿Cuál fue el rendimiento real del título?

27. $E(i_{98}) = 14\%$, $R_{CD \text{ a 30 días}} = 16.5\%$, $i_{\text{enero 98}} = 2.18\%$. ¿Cuál fue el rendimiento real anual (nominal) del certificado de depósito?
28. ¿Cuál es la tasa efectiva, si la tasa nominal de 50% se compone continuamente?
29. ¿Qué tasa discreta, compuesta anualmente, es equivalente a una tasa continua de 20%?
30. ¿Qué tasa continua es equivalente a una tasa discreta de 10%, compuesta anualmente?
31. ¿Qué prefiere: una cuenta que ofrece la tasa de 20% compuesta continuamente, o una cuenta que ofrece el 21.5% compuesta anualmente?
32. Calcule la tasa efectiva, si la tasa nominal de 20% está compuesta *a*) semestralmente, *b*) mensualmente, *c*) diariamente, *d*) continuamente

CAPÍTULO 5

Interés compuesto: valor presente y ecuaciones de valores equivalentes

Objetivos del aprendizaje

Después de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

- Calcular el valor presente con base en el valor futuro, la tasa de interés y el plazo.
- Distinguir entre el descuento bancario, el descuento racional y el descuento compuesto.
- Interpretar la tasa de descuento como el costo de oportunidad del capital.
- Interpretar el rendimiento requerido como la tasa base ajustada por el riesgo.
- Entender la relación entre la tasa de descuento compuesto y el valor presente.
- Calcular el valor presente con el descuento continuo.
- Plantear una ecuación de valores equivalentes.
- Escoger la fecha focal para una ecuación de valores equivalentes.
- Resolver diferentes tipos de problemas que requieren un planteamiento de ecuaciones de valores equivalentes.
- Encontrar el tiempo equivalente.

En este capítulo, el estudiante aprenderá a calcular el valor presente de los flujos de efectivo futuros con el método del descuento compuesto. Es el método generalmente utilizado en la evaluación de proyectos de inversión y en la evaluación de instrumentos financieros. Si se tiene el valor presente y el valor futuro, se puede calcular el rendimiento al vencimiento o, en el contexto de los proyectos de inversión, la tasa interna de retorno. Finalmente, utilizaremos el descuento compuesto y el crecimiento exponencial para plantear y resolver las ecuaciones de valores equivalentes.

VALOR PRESENTE

El valor presente (VP) es el valor actual de una cantidad que se recibirá o pagará en el futuro (VF). Para calcular el valor presente es necesario conocer el valor futuro, la tasa de interés y el plazo. El proceso de calcular el valor presente se llama *descuento*. El descuento es lo opuesto a la composición. El valor presente se despeja de la fórmula del interés compuesto:

$$VF = VP\,(1 + R)^t$$

$$\boxed{VP = \frac{VF}{(1+R)^t} = VF(1+R)^{-t}}$$

La expresión: $\dfrac{1}{(1+R)^t} = (1+R)^{-t}$ se llama *factor de descuento*, para la tasa R y el plazo t. Antes de las calculadoras electrónicas, los factores de descuento para una amplia gama de tasas y plazos eran publicados en tablas, anexadas a todos los libros de matemáticas financieras. Ahora, con la disponibilidad de equipo de cómputo, las tablas se volvieron obsoletas.

La tasa, R, en el factor de descuento, puede llamarse *tasa de descuento*, pero para no confundirla con la tasa de descuento bancario o la tasa de descuento racional, es mejor llamarla tasa con la que se descuenta el valor futuro o, en el caso de instrumentos financieros, la tasa de rendimiento. En la evaluación de proyectos de inversión, la tasa con la que se descuentan los flujos futuros debe reflejar el costo de oportunidad del capital (k). El *costo de oportunidad de capital* es la tasa de rendimiento de un portafolio de activos financieros de riesgo equivalente. Es la tasa de mercado ajustada por el riesgo.

Según el principio fundamental de las finanzas:

Una inversión es aceptable sólo si produce un rendimiento mayor que un portafolio de activos financieros de riesgo equivalente.

EJEMPLO 1

¿Cuánto podemos pagar por un bono que ofrece $1 000 en un año, si la tasa de descuento aplicable es de 10%?

$$VF = 1\,000, \quad R = 0.1, \quad t = 1$$

Solución:

$$VP = \frac{VF}{(1+R)^t} = \frac{1\,000}{1.1^1} = 909.09$$

Cuando suben las tasas de interés, los precios de los bonos bajan.

Respuesta: El precio del bono no debe ser mayor a su valor presente de $909.09.

Si, como consecuencia del deterioro de la calificación crediticia del emisor del bono, la tasa de descuento sube a 15%, el valor presente del bono baja a $869.56.

$$VP_{R=0.15} = 1\,000(1.15)^{-1} = 869.56$$

EJEMPLO 2

¿Cuánto debe depositarse en el banco que ofrece una tasa de interés de 36% compuesto mensualmente, si se desea reunir la cantidad de $200 000 en 3 años?

$$VF = 200, \quad R = 0.36/12 = 0.03 \text{ mensual}, \quad t = 3 \times 12 = 36 \text{ meses.}$$

Solución: Una manera alternativa de formular este problema es: ¿cuál es el valor presente de $200 000 en 3 años, si la tasa de descuento aplicable es de 36%, compuesta mensualmente?

La solución consiste en calcular el valor presente, recordando que hay que utilizar la tasa mensual (36%/12 = 3%) y que el periodo es de 3 × 12 = 36 meses.

$$VP = \frac{VF}{(1+R)^t} = \frac{200\,000}{1.03^{36}} = \frac{200\,000}{2.8983} = 69\,006.48$$

Respuesta: El valor presente de $200 000 en 3 años es $69 006.48.

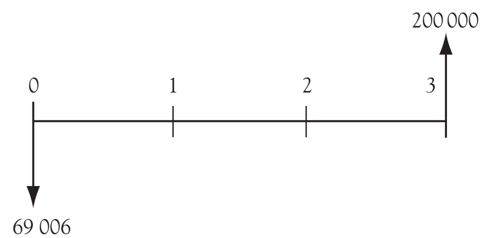
SECUENCIA EN LA CALCULADORA FINANCIERA:

12 P.AÑ, MODO FINAL, CLEAR DATA, N = 36, %IA = 36, VF = 200 000.

Al pulsar la tecla $\boxed{\text{VA}}$, obtenemos la respuesta: 69 006.48 (con el signo negativo).

El ejemplo anterior ilustra el valor del dinero en el tiempo:

Si el costo de capital es de 36%, $200 000 en 3 años es *equivalente* a $69 000 hoy.



Si vamos a recibir varios flujos de efectivo en diferentes momentos en el futuro, para compararlos necesitamos calcular el valor presente de todos los flujos, utilizando una tasa de descuento que representa el costo de oportunidad del dinero (la tasa de mercado ajustada por el riesgo).

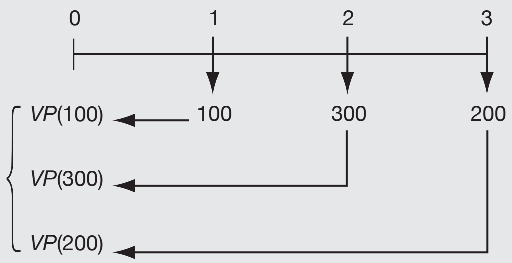
EJEMPLO 3

Un proyecto promete los siguientes flujos de efectivo netos al final de cada uno de los 3 años de su vida: 100, 300, 200. ¿Cuál es el valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto, si el costo de capital de la empresa aplicable para este tipo de proyectos es de 28%?

$$FE_1 = 100, \quad FE_2 = 300, \quad FE_3 = 200, \quad k = 28\% \text{ (el costo de capital)}$$

Solución: El valor presente de los flujos de efectivo es la suma de los valores presentes de cada uno de los flujos, descontados con la tasa de interés que representa el costo de capital. La solución consiste en calcular por separado el valor presente de cada uno de los flujos esperados en el futuro y después sumarlos.

Podemos visualizar el problema en la línea de tiempo:



La solución analítica está plasmada en la siguiente ecuación:

$$VP = \frac{FE_1}{(1+k)} + \frac{FE_2}{(1+k)^2} + \frac{FE_3}{(1+k)^3}$$

Sustituyendo los datos del problema en esta ecuación, tenemos:

$$VP = \frac{100}{1.28} + \frac{300}{1.28^2} + \frac{200}{1.28^3} = 356.6$$

Respuesta: El valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto es de $356.60.

Es el *valor presente bruto*, ya que no toma en cuenta el costo del proyecto.

EJEMPLO 4

En la compra de una casa se pagan \$100 000 y los restantes \$300 000 se liquidarán dentro de 3 años. ¿Cuál es el valor presente de la casa si el dueño puede obtener un rendimiento anual de 20% compuesto trimestralmente?

$$VF = 300\,000, \quad R = 20\%, \quad m = 4, \quad t = 3 \text{ años.}$$

Solución: El valor presente de la casa es \$100 000 más el valor presente de \$300 000 dentro de 3 años:

$$VP(\text{casa}) = 100\,000 + \frac{300\,000}{\left(1+\frac{0.2}{4}\right)^{3\times 4}} = 100\,000 + 167\,051.23 = 267\,051.23$$

Respuesta: Para el dueño, el valor presente de la casa es de \$267 051.23.

Dado el valor presente, el valor futuro y el plazo, podemos calcular la tasa de descuento compuesto que iguala el valor presente con el valor futuro. Dicha tasa es la tasa interna de retorno del proyecto, o rendimiento al vencimiento, en el caso de algún instrumento financiero. En cualquier caso, la tasa con la que se descuentan los flujos futuros debe ser mayor que la inflación esperada, porque de lo contrario tendríamos un *rendimiento real negativo*.

EJEMPLO 5

Nos proponen una inversión que cuesta \$100 000 y dentro de 2 años producirá un ingreso de \$200 000. Se espera que durante los próximos 2 años la inflación promedio será de 45% anual. ¿Conviene hacer la inversión?

$$VP = 100\,000, \quad VF = 200\,000, \quad R = ?, \quad E(i) = 45\%, \quad t = 2$$

Solución: La solución consiste en comparar el costo presente de la inversión con el valor presente del ingreso producido por la inversión dentro de 2 años y después despejar de la ecuación la tasa de descuento que, en este caso, se llama *tasa interna de retorno* (TIR)[1] o *rendimiento al vencimiento*.

$$100 = \frac{200}{(1+R)^2}$$

Para despejar R, multiplicamos ambos lados de la ecuación por $(1 + R)^2$ y dividimos entre 100.

$$(1 + R)^2 = 2$$

[1] La TIR es la tasa de descuento que iguala el valor presente de los flujos de efectivo futuros con el costo presente de la inversión.

Ahora, sacamos la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación y despejamos R:

$$1 + R = 2^{1/2} = 1.4142 \quad \Rightarrow \quad R = 41.42\%$$

Respuesta: El rendimiento de la inversión es menor que la inflación esperada, lo que implica un rendimiento negativo. La inversión no debe hacerse.

Para calcular el rendimiento real aplicamos la ecuación de Fisher:

$$r = \frac{R - i}{1 + i} = \frac{0.4142 - 0.45}{1.45} = -0.0247 = -2.47\%$$

El rendimiento negativo de la inversión es de −2.47%.[2]

Observación: El método de Fisher reduce el valor absoluto de la tasa de interés real, independientemente de si ésta es positiva o negativa.

EJEMPLO 6

Un bono sin cupones que promete pagar $100 en 5 años cuesta $70. ¿Cuál es el rendimiento al vencimiento del bono?

$$VP = 70, \quad VF = 100, \quad t = 5, \quad R = ?$$

Solución:

$$70 = \frac{100}{(1 + R)^5}$$

Para despejar R, multiplicamos ambos lados de la ecuación por $(1 + R)^5$ y dividimos entre 70.

$$(1 + R)^5 = 1.4286$$

$$1 + R = 1.4286^{0.2} = 1.0739 \qquad \Rightarrow \qquad R = 7.39\%$$

Respuesta: El rendimiento al vencimiento del bono comprado a $70 es de 7.39%.

¿Cuánto pagaría por el bono del ejemplo 6, si su rendimiento requerido para ese tipo de bonos fuese de 8%?

$$V = \frac{100}{1.08^5} = 68.0583$$

Rendimiento al vencimiento de un bono es el rendimiento calculado con base en el precio de mercado del bono y sus flujos de efectivo esperados.

Rendimiento requerido es la tasa de descuento que el inversionista usa para calcular el valor teórico del bono, es decir, el precio que está dispuesto a pagar por él.

[2] Utilizando el método aproximado, diríamos que la tasa real es de −3.6%.

Plazo fraccionario

Cuando el plazo es fraccionario, seguimos el procedimiento exactamente igual que en el caso de plazo entero.

EJEMPLO 7

Se descuenta en un banco un documento de $5000 con vencimiento a 3 meses. El documento produce 2% mensual. El banco lo descuenta con una tasa de 23% anual, compuesta anualmente. ¿Cuál es la cantidad que se recibe?

$$VP = 5\,000, \quad R_1 = 0.04 \text{ mensual}, \quad t = 3 \text{ meses o } 0.25 \text{ años.}$$

Solución:

a) El monto futuro del principal original es:

$$VF = VP\,(1 + R)^t = 5000(1.02)^3 = 5306.04$$

b) El banco descuenta esta cantidad con la tasa anual de 23%, siendo el plazo ¼ de un año:

$$VP = \frac{VF}{(1+R)^t} = \frac{5\,624.32}{1.23^{0.25}} = 5\,038.42$$

Respuesta: Se reciben $5038.42. Esto significa que el banco descuenta el documento con una tasa menor que la tasa de rendimiento del documento.

Para calcular el rendimiento anual efectivo del documento, simplemente anualizamos la tasa mensual de 2%:

$$(1.02)^{12} - 1 = 0.2682 = 26.82\%$$

El rendimiento efectivo del documento es mayor que la tasa de descuento compuesto del banco, por lo que el banco tiene que pagarnos más que el valor nominal.

Descuento continuo

En finanzas avanzadas se utiliza con frecuencia el *descuento continuo*. La fórmula del valor presente con el descuento continuo se deriva de la fórmula del crecimiento exponencial continuo:

$$VF = VPe^{Rt}$$

de donde:

$$\boxed{VP = \frac{VF}{e^{Rt}} = VFe^{-Rt}}$$

EJEMPLO 8

¿Cuál es el valor presente de $1 000 en 3 años, si la tasa de descuento de 14% se compone continuamente?

$$VF = 1\,000, \quad R = 14\%, \quad t = 3, \quad VP = ?$$

Solución:

$$VP = VFe^{-Rt} = 1\,000e^{-0.14\times 3} = 657.05$$

Respuesta: El valor presente de $1 000 en 3 años es de $657.05.

ECUACIONES DE VALORES EQUIVALENTES

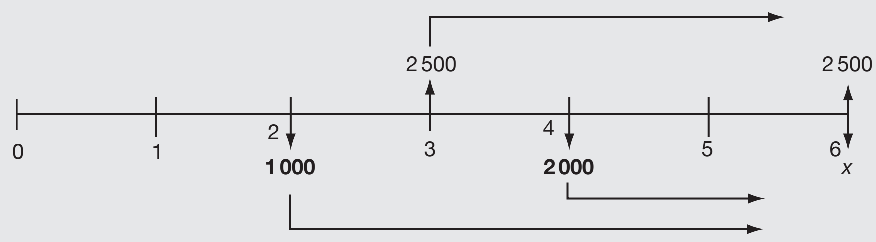
Mientras más alejado en el futuro es el periodo en que se recibirá el dinero, menor es su valor actual. Para compensar esa pérdida de valor, al capital original se le agregan intereses, a fin de que el monto futuro sea *equivalente* al capital actual. La tasa de interés nominal refleja tanto una recompensa por la pérdida del poder adquisitivo del dinero causada por la inflación, como el costo de oportunidad de usar el dinero (la tasa real).

A fin de establecer una relación de equivalencia entre varios flujos de efectivo que deben pagarse (o recibirse) en diferentes momentos, se utilizan *ecuaciones de valores equivalentes*. El punto crucial de esta metodología es determinar una fecha de comparación: la *fecha focal* o fecha de valuación. En el caso de interés compuesto, dos flujos de efectivo equivalentes en una fecha también lo serán en cualquier otra, por eso puede seleccionarse la fecha focal más conveniente sin que esto afecte el resultado.

EJEMPLO 1

Una deuda bancaria consiste en dos pagos de $2 500 cada uno, pagaderos en 3 y 6 meses. Se desea liquidarla en 3 pagos bimestrales. Si el primer pago es de $1 000 y el segundo de $2 000, ¿a cuánto ascenderá el tercer pago con la tasa de 36% anual compuesta mensualmente?

Solución: El primer paso consiste en elaborar una *gráfica de tiempo y valor*[3] para poder plantear el problema:



[3] También conocida como *línea de tiempo* o *diagrama de flujo de efectivo*.

Ahora ya podemos formular una ecuación de valores equivalentes en la cual el valor en el sexto mes (la fecha focal) de los dos flujos de arriba es igual al valor en la misma fecha de los tres flujos de abajo, incluyendo el pago final, X.

$$2\,500(1 + 0.03)^3 + 2\,500 = 1\,000(1.03)^4 + 2\,000(1.03)^2 + X$$

$$5\,231.82 = 3\,247.3 + X \quad \Rightarrow \quad X = 1\,984.51$$

Respuesta: El tercer pago debe ser de $1 984.51.

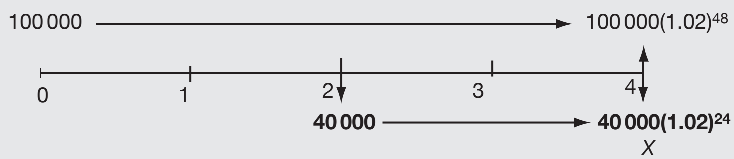
Los tres pagos bimestrales son totalmente *equivalentes* a los dos pagos pactados originalmente. Este tipo de reestructuración de la deuda no implica ninguna concesión ni carga. El objetivo de la reestructuración es adecuar los pagos a los flujos de efectivo esperados por la empresa.

Para consolidar la metodología resolveremos otro ejemplo, en el cual la fecha focal conveniente es el último periodo.

EJEMPLO 2

El señor Aranda recibe un préstamo de $100 000 a 4 años con la tasa de 24%, compuesto mensualmente. Después de 2 años decide hacer una amortización de $40 000. ¿Cuánto tendrá que pagar al final del cuarto año si la tasa de interés permanece constante?

Solución: En la línea de tiempo marcamos arriba lo que el señor Aranda debe y abajo lo que ya pagó o debe pagar:



La ecuación de valor afirma simplemente que el valor final de la deuda debe ser igual al valor final de los pagos:

$$\underbrace{100\,000 \cdot (1.02)^{48}}_{\text{Valor final de la deuda}} = \underbrace{40\,000 \cdot (1.02)^{24} + x}_{\text{Valor final de los pagos}}$$

$$258\,707.04 = 64\,337.49 + X$$

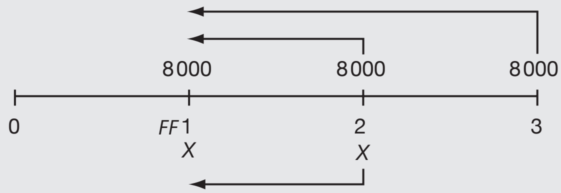
Resolviendo esta ecuación respecto a X, tenemos: $X = 194\,369.55$.

Respuesta: El pago final necesario para saldar la deuda es de $194 369.55.

EJEMPLO 3

Al comprar un automóvil se suscriben 3 documentos por $8 000 a pagar en 30, 60 y 90 días. Posteriormente se decide liquidar la deuda con 2 pagos iguales a 30 y 60 días. La tasa de interés mensual es de 2%. ¿Cuál es el importe de cada pago?

Solución: Primero elaboramos una gráfica de tiempo y valor.



A continuación seleccionamos como la fecha focal el mes 1 y formulamos una ecuación de valores equivalentes, en la cual el valor en el primer mes de los 3 flujos de arriba es igual al valor en el primer mes de los dos flujos de abajo, X, el cual necesitamos determinar.

$$8\,000 + \frac{8\,000}{1.02} + \frac{8\,000}{(1.02)^2} = X + \frac{X}{1.02}$$

$$23\,532.49 = 1.9804\,X \qquad \Rightarrow \qquad X = 11\,882.74$$

Respuesta: Para saldar la deuda se deben pagar 2 abonos de $11 882.74 cada uno.

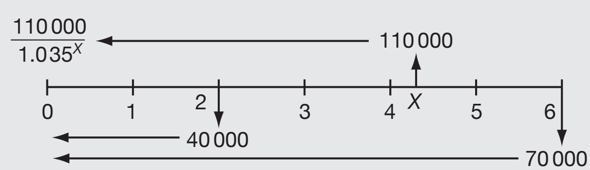
Tiempo equivalente[4]

En ocasiones se desea hacer un pago único para liquidar un conjunto de obligaciones. La fecha en la cual se puede hacer dicho pago se llama *fecha de vencimiento promedio de las deudas* y el tiempo hasta esta fecha se llama *tiempo equivalente*.

EJEMPLO 4

Una empresa adeuda al banco $40 000 a 2 meses y $70 000 a 6 meses. Desea liquidar la deuda con un pago único de $110 000. La tasa de interés mensual es de 3.5%. ¿Cuándo debe hacer su pago (cuál es el tiempo equivalente)?

Solución: Construimos la gráfica de tiempo y valor y seleccionamos como la fecha focal el periodo cero:



[4] Este tema puede omitirse sin pérdida de continuidad.

La parte superior de la gráfica requiere alguna explicación. La empresa desea saldar sus deudas mediante un pago único de $110 000 en el periodo *X*, que es desconocido. Entonces, el valor presente de este pago, con la tasa de descuento de 3.5%, es:

$$VP(110\,000)\Big|_{R=3.5\%} = \frac{110\,000}{1.035^X}$$

El valor presente de los dos adeudos es la suma del valor presente de cada uno de ellos:

$$VP(\text{adeudos}) = 40\,000(1.035)^{-2} + 70\,000(1.035)^{-6}$$

Así, la ecuación de valor equivalente adquiere la forma siguiente:

$$\frac{110\,000}{1.035^X} = \frac{40\,000}{1.035^2} + \frac{70\,000}{1.035^6}$$

Para despejar *X*, primero efectuamos la suma del lado derecho:

$$\frac{110\,000}{1.035^X} = 37\,340.42 + 56\,945.04 + 94\,285.47$$

de donde: $(1.035)^X = 1.1667$

Ahora, sacando los logaritmos, tenemos:

$$X\log(1.035) = \log(1.1667) = 0.1542$$

$$X = 0.1542/\log(1.035) = 4.481 \text{ meses} = 134 \text{ días}$$

Respuesta: Para liquidar las deudas de la empresa es necesario hacer un pago único de $110 000 en 4 meses y 14 días.

Términos clave

Costo de capital
Descuento compuesto
Descuento continuo
Ecuaciones de valores equivalentes
Fecha focal
Rendimiento al vencimiento
Tasa interna de retorno
Tiempo equivalente
Valores equivalentes
Valor presente bruto

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Un pagaré de $10 000 vence en 18 meses. ¿Cuánto se recibirá por este pagaré hoy, si el banco utiliza la tasa de descuento compuesto de 2.5% mensual?
2. ¿Cuánto podemos pagar por un bono (sin cupones) que promete pagar $1 000 en 3 años, si el mejor rendimiento que podemos obtener en una inversión de igual plazo y un riesgo semejante es de 12%?

3. Se tiene un pagaré por $800, pagadero en 9 meses. Se quiere descontarlo en un banco que aplica una tasa de 40%, compuesta mensualmente. ¿Cuánto pagará el banco?
4. ¿Cuánto debemos depositar en una cuenta hoy para tener $300 000 en 9 meses, si la cuenta rinde 16%, compuesto mensualmente?
5. ¿Cuál es el rendimiento al vencimiento de un bono con el valor nominal de 100 Udis y el plazo de 4 años, si su precio es de 75 Udis?
6. Un pagaré promete pagar $70 000 en 8 meses. ¿Cuál es el rendimiento (anual) que recibe un inversionista que compra el pagaré por $55 000?
7. Tenemos una deuda que consiste en 4 pagos de $5 000 al final de cada uno de los siguientes 4 trimestres. Deseamos cancelar la deuda con 2 pagos iguales, al final del primer y segundo semestres. ¿Cuál debería ser el monto de cada pago, si la tasa de interés de 35% es capitalizada mensualmente?
8. Para comprar un auto usado suscribimos 2 pagarés de $20 000 cada uno, a pagar en 2 y en 4 meses. Tomamos la decisión de liquidar la deuda con un pago único, inmediato. ¿Cuánto tenemos que pagar, si la tasa de interés aplicable es de 48%, compuesta mensualmente?
9. El señor Velázquez firmó dos pagarés: uno por $200 000 que vence en 9 meses y otro por $350 000 con el vencimiento en 20 meses. Antes de pagar el primer pagaré se da cuenta de que, de acuerdo con los flujos de efectivo esperados por su empresa, lo más conveniente sería liquidar los 2 pagarés con un pago único al final del mes 12. ¿Cuál será el monto del pago final si su acreedor le cobra una tasa de 33%, compuesta diariamente?
10. Una empresa contrata una deuda de $500 000 a 2 años a 35% compuesto mensualmente. Después de un año, la empresa efectúa un pago anticipado de $200 000 y propone liquidar la deuda con un pago final en un año y medio más. ¿Cuál es el monto del pago final, si en el momento de hacer la reestructuración de la deuda la tasa de interés para este tipo de préstamos es de 32%, compuesto trimestralmente?

CAPÍTULO 6

Anualidades

Objetivos del aprendizaje

Después de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

- Identificar diferentes tipos de anualidades.
- Dibujar el diagrama de tiempo de una anualidad.
- Calcular el valor futuro de una anualidad como la suma del valor futuro de todos los pagos.
- Desarrollar la fórmula del valor futuro de una anualidad ordinaria.
- Seleccionar la tasa de interés adecuada para cálculos de anualidades a largo plazo.
- Calcular el valor presente de una anualidad como la suma del valor presente de todos los pagos.
- Desarrollar la fórmula del valor presente de una anualidad ordinaria.
- Calcular el pago periódico y el plazo de una anualidad.
- Comprender las repercusiones económicas y financieras del refinanciamiento de una deuda hipotecaria.
- Usar el concepto de anualidad para plantear y resolver diferentes problemas económicos.
- Calcular la tasa de interés implícita en una anualidad.
- Resolver problemas que involucran el valor presente y el valor futuro de las anualidades anticipadas.

TIPOS DE ANUALIDADES

La *anualidad* es un conjunto de pagos iguales realizados a intervalos iguales. El intervalo no tiene que ser de un año, puede ser un mes o una quincena. El tiempo que transcurre entre un pago y otro se llama *intervalo de pago* o periodo de pago. El *plazo* de la anualidad es el tiempo entre el primer pago y el último.

Hay varios tipos de anualidades:

Anualidad cierta	cuando sus fechas son fijas y se estipulan de antemano
Anualidad contingente	cuando la fecha del primer pago depende de algún hecho que se sabe que ocurrirá, pero no se sabe cuándo (ejemplo: renta vitalicia que se otorga a un cónyuge tras la muerte del otro)
Anualidad simple	cuando el periodo de pago coincide con el periodo de capitalización de los intereses
Anualidad general	cuando el periodo de pago no coincide con el de capitalización de los intereses
Anualidad vencida	también conocida como *ordinaria*, cuando los pagos se efectúan al final de cada periodo
Anualidad anticipada	o *pagadera,* cuando los pagos se realizan al principio de cada periodo
Anualidad inmediata	cuando los cobros (o pagos) se efectúan inmediatamente después de la formalización del contrato
Anualidad diferida	cuando se pospone la realización de los cobros (o pagos): por ejemplo, los abonos empiezan seis meses después de adquirida la mercancía.

Las anualidades más comunes son la *simple*, la *cierta*, la *ordinaria* y la *inmediata*. Son las que analizaremos en el presente texto. Todas las demás anualidades constituyen sólo variaciones (y complicaciones) sobre este tema principal.

VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD

En adelante utilizaremos los siguientes símbolos:

a	cantidad que se paga (o recibe) periódicamente, conocida también como la renta periódica.
$VFA_{R,n}$	valor futuro de la anualidad con la tasa de interés R, que dura n periodos.
$VPA_{R,n}$	valor presente de la anualidad con la tasa de interés R, que dura n periodos.
n	número de periodos que se recibe la anualidad. Es el plazo de la anualidad.
t	número del periodo concreto ($t = 1,2,3,\ldots n$). El tiempo que transcurre entre dos periodos se llama *intervalo* de la anualidad, por ejemplo, un mes.
R	tasa de interés nominal anual.

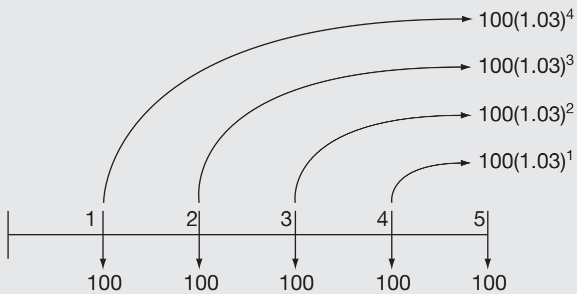
Antes de deducir una fórmula general resolveremos un ejemplo, apoyándonos en un diagrama de tiempo y valor.

EJEMPLO 1

¿Qué cantidad se acumulará en cinco meses, si al finalizar cada mes se hace un pago de \$100 a una cuenta de inversiones que rinde 36% compuesto mensualmente?

$$a = 100, \quad R = 0.03 \text{ mensual}, \quad n = 5, \quad VFA_{0.03,5} = ?$$

En el diagrama de tiempo y valor se indicará el valor futuro (en el quinto mes) de cada pago mensual.



En el quinto mes la cantidad acumulada en la cuenta será:

$$VFA_{0.03,5} = 100 + 100(1.03) + 100(1.03)^2 + 100(1.03)^3 + 100(1.03)^4$$
$$= 100(5.3091) = 530.91$$

Respuesta: Si se ahorran \$100 cada mes en una cuenta que rinde 3% mensual, en cinco meses se habrán acumulado \$530.91.

Factorizando 100 en la suma que constituye la solución del ejemplo 1, obtenemos:

$$VFA_{0.03,5} = 100[1 + (1.03)^1 + (1.03)^2 + (1.03)^3 + (1.03)^4] = 530.91$$

o en términos simbólicos:

$$VFA_{R,n} = a \cdot \left[1 + (1+R)^1 + (1+R)^2 + \cdots + (1+R)^{n-1}\right]$$

La suma de los elementos que están entre corchetes se llama *progresión geométrica*. Efectuando la operación de suma obtenemos:

$$\left[1 + (1+R) + (1+R)^2 + (1+R)^3 + \cdots + (1+R)^{n-1}\right] = \frac{(1+R)^n - 1}{R}$$

La expresión $\dfrac{(1+R)^n - 1}{R}$ representa la suma de los valores futuros de n pagos de \$1 a tasa R. Es el *factor del valor futuro de la anualidad*, $FVFA_{R,n}$ y su valor, para un rango de tasas de interés y periodos típicos, se puede encontrar en las tablas incluidas en los libros de finanzas.

Multiplicando el factor del valor futuro de una anualidad por el pago periódico, a, obtenemos la fórmula para el *valor futuro de la anualidad*:

$$\boxed{VFA_{R,n} = a\left[\frac{(1+R)^n - 1}{R}\right] = \frac{a}{R}\left[(1+R)^n - 1\right]}$$

Si la capitalización es anual, R significa la tasa anual y n es el número de años. Si la capitalización es m veces al año, la tasa de interés de la fórmula hay que dividirla entre m y el número de años hay que multiplicarlo por m.

$$VFA_{R,n,m} = \frac{a}{\left(\frac{R}{m}\right)}\left[\left(1+\frac{R}{m}\right)^{m\times n} - 1\right]$$

Reflexión sobre matemáticas financieras

¿Cómo sumar una progresión geométrica que contiene n elementos?

Primero designamos la suma de n elementos como S_n. A continuación multiplicamos ambos lados por $(1 + R)$.

$$S_n = 1 + (1+R)^1 + (1+R)^2 + \cdots + (1+R)^{n-1}$$

$$(1+R)\,S_n = (1+R)^1 + (1+R)^2 + \cdots + (1+R)^{n-1} + (1+R)^n$$

Ahora, aprovechando la *propiedad telescópica*, restamos la segunda ecuación de la primera:

$$S_n - (1+R)\,S_n = 1 - (1+R)^n$$

$$S_n\,[1 - (1+R)] = 1 - (1+R)^n$$

$$(-R)\,S_n = 1 - (1+R)^n$$

$$R\,S_n = (1+R)^n - 1, \quad \text{de donde}$$

$$S_n = \left[1 + (1+R) + (1+R)^2 + (1+R)^3 + \cdots + (1+R)^{n-1}\right] = \frac{(1+R)^n - 1}{R}$$

EJEMPLO 2

¿Qué cantidad se acumulará en cinco años, si al fin de cada mes se hace un pago de $1 000 a una cuenta que rinde 48% capitalizable mensualmente?

$$a = 1\,000, \quad R = 0.04 \text{ mensual}, \quad n = 5(12) = 60 \text{ meses}, \quad VFA_{0.04,60} = ?$$

Solución: Al aplicar la fórmula para el valor futuro de la anualidad, tenemos:

$$VFA_{R=0.04,n=60} = \frac{a}{R}\left[(1+R)^n - 1\right] = \frac{1\,000}{0.04}\left(1.04^{60} - 1\right) = 237\,990.68$$

Respuesta: Depositando $1 000 al final de cada mes en una cuenta que rinde 48% anual, compuesto mensualmente, después de cinco años tendremos $237 990.68.

¿De esta cantidad, los depósitos constituyen tan sólo $60 000. El resto es el producto de los intereses acumulados.

Secuencia en la calculadora financiera:

12 P.AÑ, MODO FINAL, CLEAR DATA

N	%IA	VA	PAGO	VF
60	48	0	1 000	?

Al oprimir la tecla VF obtenemos la respuesta: 237 990.68.

CÁLCULOS DE ANUALIDADES EN TÉRMINOS REALES

Parece mucho dinero $237 990.68, sobre todo si lo comparamos con el pago mensual de tan sólo $1 000. En realidad se trata de una ilusión monetaria. Si tomamos en cuenta la inflación, el poder adquisitivo de esta suma puede ser bastante modesto. Usualmente, altas tasas de interés implican altas tasas de inflación. Si durante los cinco años del ejemplo 2 la tasa de inflación anual fuese de 45%, el valor futuro de los 60 pagos mensuales, pero a precios de hoy, sería apenas de: $\frac{237\,990.68}{1.45^5} = 37\,129.57$. Esto se debe a que, en términos reales, el valor de nuestra contribución mensual decrece rápidamente. A precios de hoy, el valor de la última contribución es de: $1\,000/1.45^5 = 156.01$.

Cuadro 6.1

Valor real (a precios de hoy) de la aportación de $1 000 al final de cada periodo, si la inflación anual es de 30%.

Periodo	Valor nominal	Valor real
1	1 000	769.23
2	1 000	591.72
3	1 000	455.17
4	1 000	350.13
5	1 000	269.33

En un entorno inflacionario, los pagos constantes en términos nominales significan *pagos decrecientes en términos reales*.

Para acumular un fondo con el valor real en un entorno inflacionario tenemos que aumentar la aportación mensual al mismo ritmo que la inflación:

$$a(t) = a_0 (1+i)^t$$

donde a_0 es el valor de la aportación inicial,
a_t es el valor de la aportación en el periodo t,
i es la tasa de inflación.

Esto es posible si especificamos la aportación como un porcentaje fijo de nuestro ingreso y el ingreso crece al ritmo de la inflación. Si es factible, entonces en la fórmula de anualidad utilizamos la tasa de interés real. Para calcular la tasa real efectiva necesitamos convertir la tasa de 48% en la tasa efectiva:

$$\left(1+\frac{0.48}{12}\right)^{12} - 1 = 0.601 = 60.1\%$$

Utilizando esta tasa calculamos la tasa real:

$$r = \frac{0.601 - 0.45}{1.45} = 0.1042 = 10.42\%$$

Una tasa de 10.42% efectiva implica una tasa nominal de 9.95%. Utilizando esta tasa real y la aportación constante en términos del poder adquisitivo calculamos el valor futuro de la anualidad, en pesos de hoy:

$$\frac{1\,000}{\left(\frac{0.0995}{12}\right)}\left[\left(1+\frac{0.0995}{12}\right)^{60} - 1\right] = 77\,334.83$$

Reflexión sobre matemáticas financieras

Un método alternativo para calcular la tasa real consiste en llevar todo el cálculo en escala mensual.

Si la inflación anual es de 45%, la inflación mensual (como promedio geométrico) es:

$$\left(1.45^{\frac{1}{12}} - 1\right)\cdot 100 = 3.1448\%$$

Así, la tasa real mensual es: $\frac{1.04}{1.0314} - 1 = 0.008291 = \frac{0.0995}{12}$

El valor futuro del fondo a precios constantes es $77 333.85. De esta cantidad, $60 000 son las aportaciones mensuales y $17 333.95 los intereses reales ganados. Es la cantidad cuyo valor podemos entender fácilmente, porque está expresada en pesos de hoy. En cambio, en cinco años el valor nominal de nuestro fondo será muy grande: $77\,333.95(1.45)^5 = \$495\,689.41$ y el valor nominal de nuestra última aportación será de: $1\,000(1.45)^5 = \$6\,409.73$. Son las cantidades cuyo valor difícilmente podemos apreciar ahora.

Cuando la inflación es alta, toda planeación financiera a largo plazo debe hacerse a precios constantes (en términos reales).

El nuevo sistema de pensiones, que consiste en cuentas individuales en las Afores, y el uso de las Udis son dos acontecimientos que vuelven muy útil la fórmula del valor futuro de una anualidad. Las Udis eliminan el efecto de la inflación y permiten establecer tasas de interés válidas en largos periodos.

EJEMPLO 1

¿Qué cantidad se acumulará en 30 años en una cuenta de retiro denominada en Udis, si la aportación quincenal es de 500 Udis (se supone que los incrementos salariales del beneficiario apenas serán suficientes para compensar la inflación, lo que mantendrá la aportación en Udis constante) y la cuenta rinde 5% anual compuesto quincenalmente?

$$a = 500, \quad R = 0.05/24 \text{ quincenal}, \quad n = 30 \times 24 = 720 \text{ quincenas}$$

Solución:

$$VFA_{R=5\%,\, n=30,\, m=24} = \frac{500}{\left(\frac{0.05}{24}\right)}\left[\left(1+\frac{0.05}{24}\right)^{720} - 1\right] = 833\,928.38$$

Respuesta: Al retirarse después de 30 años, el trabajador tendrá un fondo de pensiones igual a 833 928.38 Udis.

En la calculadora financiera ingresamos los siguientes datos:

24 P.AÑ, MODO FINAL, CLEAR DATA

N	%IA	VA	PAGO	VF
720	5	0	–500	?

Al oprimir la tecla VF obtenemos la respuesta: 833 928.38.

Si en vez de hacer las aportaciones quincenales el patrón efectuara las aportaciones bimestrales (con la capitalización bimestral), el valor futuro del fondo de pensiones sería un poco más bajo. Presentaremos sólo la secuencia en la calculadora: 6 P.AÑ, MODO FINAL, CLEAR DATA N = 180, %IA = 5, PAGO = 2 000, VF = 828 940.69.

El hecho de que las aportaciones sean bimestrales en vez de quincenales reduce el valor futuro del fondo en 4 987.68 Udis.

Anualidades con tasas de interés variables

EJEMPLO 2

Los datos son los mismos que en el ejemplo 1, pero después de los primeros 10 años se espera que la tasa de interés baje a 4% compuesto quincenalmente ¿Qué cantidad se acumulará en 30 años?

$a = 500$, $R = 0.05/24$ quincenal las primeras 240 quincenas y $R = 0.04/24$ las restantes 480 quincenas

Solución: Primero calculamos el valor del fondo después de los primeros 10 años:

$$VFA = \frac{500}{0.002083}\left(1.002083^{240} - 1\right) = 155\,487.32$$

A continuación calculamos el valor de esta cantidad en 20 años más:

$$155\,487.32[1 + 0.04/24]^{480} = 345\,813.1$$

Ahora tenemos que calcular el valor de la anualidad de los años 10 a 30 (cambio de R):

$$VFA = \frac{500}{0.00167}\left(1.00167^{480} - 1\right) = 367\,217.92$$

Sumando los dos valores obtenemos el valor del fondo de pensiones en 30 años:

$$345\,813.1 + 367\,217.92 = 713\,031 < 833\,928$$

Respuesta: Después de 30 años el fondo tendrá 713 031 Udis.

A largo plazo, el valor de un fondo de pensiones es muy sensible a los pequeños cambios en las tasas de interés.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Saldo de una anualidad como una ecuación en diferencias

Si expresamos una anualidad de pagos iguales como una ecuación en diferencias, obtenemos una ecuación del saldo de la anualidad, más general que la ecuación del valor futuro de la anualidad.

En cualquier momento, el saldo de una anualidad es igual al saldo del periodo anterior más el interés que ganó el saldo del periodo anterior, más el pago del periodo. En términos simbólicos:

$$P_t = P_{t-1} + RP_{t-1} + a = (1+R)P_{t-1} + a$$

donde P_t es el saldo en el periodo t, y a es el pago periódico.

Desplazando los subíndices un periodo hacia adelante y ordenando, obtenemos una ecuación en diferencias lineal de primer orden:

$$P_{t+1} - (1 + R)P_t = a \tag{1}$$

La solución de esta ecuación representa la trayectoria temporal del saldo de la anualidad en diferentes momentos. La solución general es la suma de la solución particular y la solución complementaria.

La solución particular es la solución constante: $P_{t+1} = P_t = P_p$.

Al sustituir P_p en la ecuación (1) tenemos: $P_p = -\dfrac{a}{R}$.

La solución complementaria es la solución de la ecuación homogénea:

$$P_{t+1} - (1 + R)P_t = 0$$

Resulta obvio que la solución de esta ecuación es:

$$P_t = A(1+R)^t$$

donde A es una constante arbitraria que puede determinarse con base en el conocimiento de las condiciones iniciales.

La solución general es la suma de la solución particular y la solución complementaria

$$P_t = P_c + P_p = A(1+R)^t - \frac{a}{R}$$

Para determinar la constante A, suponemos que en el periodo inicial el saldo es igual a P_0.

$$P_0 = A - \frac{a}{R} \qquad \Rightarrow \qquad A = P_0 + \frac{a}{R}$$

Utilizando este valor de A, escribimos la solución de la ecuación en diferencias

$$P_t = \left(P_0 + \frac{a}{R}\right)(1+R)^t - \frac{a}{R} \tag{2}$$

Esta ecuación nos permite calcular el saldo de la anualidad en cualquier momento t, con base en el saldo inicial P_0 y el pago periódico a.

Si el saldo inicial es igual a cero, la ecuación se convierte en el valor futuro de una anualidad de pagos iguales.

$$P_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_t = \frac{a}{R}\left[(1+R)^t - 1\right] = VFA$$

La solución de la ecuación (1) mediante el método de aproximaciones sucesivas permite entender mejor la naturaleza de la solución y obtener una expresión muy útil de la fórmula del saldo:

$$P_1 = (1+R)P_0 + a$$

$$P_2 = (1+R)P_1 + a = (1+R)^2 P_0 + (1+R)a + a$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$P_t = (1+R)^t P_0 + a\left[1 + (1+R) + (1+R)^2 + \cdots + (1+R)^{t-1}\right]$$

La expresión que está entre corchetes es la suma de la progresión geométrica creciente, igual a $[\cdots] = \dfrac{(1+R)^t - 1}{R}$.

Utilizando este resultado, la solución puede escribirse como:

$$P_t = P_0(1+R)^t + \frac{a}{R}\left[(1+R)^t - 1\right]$$

El primer componente de la suma es el valor futuro del saldo inicial y el segundo componente es el valor futuro de los pagos periódicos.

Cuando el saldo inicial es cero, la solución se convierte en la conocida fórmula del valor futuro de la anualidad de pagos iguales.

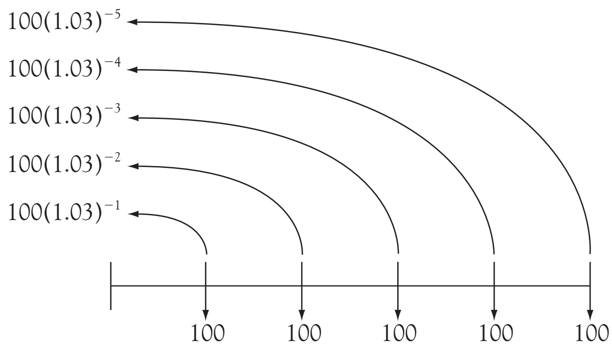
VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD

¿Cuál es el valor presente de la anualidad del ejemplo 1?

Utilizando la fórmula del valor presente, podemos calcular:

$$VPA = \frac{VFA}{(1+R)^t} = \frac{530.91}{1.03^5} = 457.97$$

Para comprobar este resultado podemos usar un diagrama de tiempo y valor semejante al del ejemplo 1, pero llevando los valores de los cinco pagos al año cero.



Al sumar los valores presentes de los pagos mensuales, obtenemos:

$$VPA_{0.03,5} = 100\left(\frac{1}{1.03} + \frac{1}{1.03^2} + \frac{1}{1.03^3} + \frac{1}{1.03^4} + \frac{1}{1.03^5}\right) = 457.97$$

Utilizando los símbolos, tenemos:

$$VPA_{R,n} = a\left[\frac{1}{(1+R)} + \frac{1}{(1+R)^2} + \frac{1}{(1+R)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+R)^n}\right]$$

Al sumar las expresiones que están entre corchetes tenemos:

$$\left[\frac{1}{1+R}+\frac{1}{(1+R)^2}+\frac{1}{(1+R)^3}+\cdots+\frac{1}{(1+R)^n}\right]=\frac{1-\dfrac{1}{(1+R)^n}}{R}=\frac{1}{R}\left[1-\frac{1}{(1+R)^n}\right]$$

Sustituyendo, obtenemos la fórmula para el *valor presente de una anualidad*:

$$\boxed{VPA_{R,n}=\frac{a}{R}\left[1-\frac{1}{(1+R)^n}\right]}$$

Podemos obtener el mismo resultado aplicando la fórmula del valor presente a la fórmula para el valor futuro de la anualidad:

$$VPA_{R,n}=VFA_{R,n}\,\frac{1}{(1+R)^n}=a\frac{(1+R)^n-1}{R}\,\frac{1}{(1+R)^n}=\frac{a}{R}\left(1-\frac{1}{(1+R)^n}\right)$$

Formas alternativas de escribir la fórmula del valor futuro de una anualidad:

$$VPA_{R,n}=a\left[\frac{1-(1+R)^{-n}}{R}\right]=\frac{a}{R}\left(1-\frac{1}{(1+R)^n}\right)=\frac{a\left[(1+R)^n-1\right]}{R(1+R)^n}$$

EJEMPLO 1

Una aseguradora nos ofrece una anualidad de 2000 Udis quincenales durante los próximos 20 años. La tasa de interés es 6% anual, compuesta quincenalmente. ¿Cuánto podemos pagar por esta anualidad?

$a = 2000$, $R = 0.06/24$ por quincena, $n = 24(20) = 480$ quincenas

Solución: Aplicamos la fórmula para el valor presente de la anualidad:

$$VPA_{R,n}=\frac{a}{R}\left(1-\frac{1}{(1+R)^n}\right)=\frac{2000}{0.0025}\left(1-\frac{1}{1.0025^{480}}\right)=558683.53$$

Respuesta: En el momento actual, la anualidad vale 558683.53 Udis.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Calcule el valor presente de 36 mensualidades de $4500, si la tasa de interés es de 12%.

Respuesta: *VPA* = $135483.77

EJEMPLO 2

La educación de un estudiante costará 10 000 Udis por semestre, durante los próximos siete años. Las cuentas en Udis rinden 5% anual, compuesto semestralmente. Se quiere establecer un fideicomiso hoy para que se encargue del pago de las colegiaturas semestrales. ¿Cuánto se debería depositar en el fideicomiso?

$$a = 10\ 000, \qquad R = 0.05/2 = 0.025 \text{ semestral}, \qquad n = 7(2) = 14 \text{ semestres}$$

Solución: Aplicamos la fórmula para el valor presente de la anualidad:

$$VPA_{0.025,14} = \frac{10\,000}{0.025}\left(1 - \frac{1}{1.025^{14}}\right) = 116\,909.1$$

Respuesta: En el fideicomiso hay que depositar 116 909.1 Udis.

PROBLEMA METODOLÓGICO

A todos los padres de familia una universidad les ofrece la posibilidad de adquirir un certificado negociable de pago de colegiatura por uno o más semestres a precios de hoy, pagando en efectivo. El certificado de colegiatura será respetado en el futuro en cualquier campus del sistema.

a) ¿Qué supuestos acerca del ritmo de crecimiento del costo de la colegiatura y las tasas de interés en el futuro tiene que hacer un padre de familia para aceptar esta oferta de la universidad?

b) ¿Qué supuesto hace la universidad?

Respuesta:

a) La persona que acepta la oferta supone implícitamente que en el futuro las colegiaturas van a crecer a un ritmo mayor que el rendimiento que él (o ella) puede obtener en el mercado de dinero, o invirtiendo los fondos en su negocio. Obsérvese que la inflación esperada no entra directamente en este cálculo. Entra indirectamente como un factor en la determinación de las tasas de interés en el futuro. Comprar la colegiatura hoy para uso futuro es equivalente a establecer un fideicomiso, cuyo rendimiento es igual al ritmo de crecimiento anual de las colegiaturas de la universidad. Es un tipo de ahorro forzoso con un rendimiento garantizado.

b) La universidad supone que utilizando los fondos eficientemente para la expansión de las instalaciones obtendrá un rendimiento mayor que la tasa de crecimiento de las colegiaturas; además, desea amarrar a los clientes futuros.

EJEMPLO 3

¿Qué términos de adquisición de un automóvil son más ventajosos:

a) pagar $85 000 al contado?

b) pagar un enganche de $20 000 y 24 mensualidades de $3 000, si la tasa de interés es de 18% compuesta mensualmente?

$$a = 3000, \quad R = 0.18/12 = 0.015 \text{ al mes}, \quad n = 24 \text{ meses}$$

Solución: Para comparar las dos alternativas es necesario calcular el valor presente de la alternativa *b*), dado que el *VP* de la alternativa *a*) es igual a 70 000.

El valor presente de las 24 mensualidades es:

$$VPA_{0.015,24} = \frac{3000}{0.015}\left(1 - \frac{1}{1.015^{24}}\right) = 60\,091.22$$

Sumando a esta cantidad el enganche, obtenemos el valor presente de la alternativa *b*)

$$VP_b = 20\,000 + 60\,091.22 = 80\,091.22 < VP_a = 85\,000$$

Respuesta: Resulta más ventajoso comprar el automóvil a plazos.

Observación: Esta respuesta es correcta si la persona que tiene el efectivo lo puede invertir a 18%.

PLAZO

Si conocemos el valor presente de la anualidad y el pago periódico, podemos despejar el número de pagos: el plazo de la anualidad.

EJEMPLO 1

Un automóvil cuesta $90 000. El enganche es de $20 000. La tasa de interés aplicable es de 18%, compuesta mensualmente. ¿Cuántos pagos mensuales de $4 000 hay que hacer para comprar el automóvil?

$$VPA = 50\,000, \quad a = 4\,000, \quad R = 0.015 \text{ mensual}, \quad n = ?$$

Solución: El valor presente de las n mensualidades es:

$$70\,000 = \frac{4\,000}{0.015}\left(1 - \frac{1}{1.015^{n}}\right)$$

Para despejar n, primero multiplicamos ambos lados de la ecuación por 0.015 y a continuación dividimos entre 4 000.

$$0.2625 = 1 - \frac{1}{1.015^{n}}$$

Después de reordenar los términos, tenemos:

$$\frac{1}{1.015^{n}} = 0.7375$$

Ahora, dividimos ambos lados entre 0.7375 y multiplicamos por $(1.015)^n$.

$$(1.015)^n = 1.3559$$

Para finalizar, sacamos los logaritmos y despejamos n:

$$n\log(1.015) = \log 1.3559$$

$$n = 0.693/0.0392 = 20.45 = 20 \text{ meses y } 14 \text{ días}$$

Cuando el número de pagos no es un número entero, el procedimiento generalmente aceptado es que junto con el último pago el deudor paga también el saldo restante. Para calcular este saldo, tenemos que restar del valor de la deuda después de 20 meses el valor de los pagos efectuados.

Después de 20 meses, el valor futuro de los abonos de $4 000 será:

$$\frac{4\,000}{0.015}\left(1.015^{20} - 1\right) = 92\,494.67$$

Mientras tanto, el valor futuro de la deuda será:

$$70\,000(1.015)^{20} = 94\,279.85$$

La diferencia, esto es, $1 785, la tendrá que pagar el deudor junto con su abono número 20. Esta diferencia constituye 45% de un abono normal.

Una manera aproximada de calcular la diferencia es multiplicar la mensualidad por 0.45. El resultado es: 0.45(4 000) = 1 800, que es una aproximación aceptable.

Respuesta: Es necesario realizar 20 pagos de $4 000, más una diferencia de $1 785.

Secuencia en la calculadora financiera:

12 P.AÑ, MODO FINAL, CLEAR DATA

N	%IA	VA	PAGO	VF
?	18	70 000	–4 000	0

Al pulsar la tecla N, obtenemos la respuesta: N = 20.45.
Para calcular qué saldo queda después de pagar 20 mensualidades de 4 000, ingresamos 20 en el registro N y, al oprimir la tecla VF, obtenemos la respuesta: VF = 1 785.2. Este saldo de la deuda después de 20 pagos hay que liquidarlo junto con el último pago.

¿Cuál sería la respuesta al problema 1 si, en vez de una mensualidad de $4 000 se tratara de liquidar la deuda mediante pagos de $1 050 mensuales? Repetimos la solución sustituyendo $a = 2\,000$:

$$70\,000 = \frac{1\,050}{0.015}\left(1 - \frac{1}{1.015^{n}}\right)$$

$$1 - \frac{1}{1.04^{n}} = 1$$

$$\frac{1}{1.04^{n}} = 0$$

La ecuación de arriba sólo puede tener sentido como tendencia, cuando n se vuelve infinitamente grande: $n \to \infty$.

Este resultado no debe sorprender, ya que $1 050 no es una cantidad cualquiera. Es exactamente igual al monto de los intereses: 70 000(0.015) = 1 050.

Si la mensualidad apenas cubre los intereses, la deuda no se amortizará nunca.

Podemos ir más allá con nuestro ejemplo:

¿Cuántas mensualidades tendría que hacer el comprador si deseara pagar una mensualidad nada más de $1 000?

Repetimos la solución sustituyendo: $a = 1\,500$

$$70\,000 = \frac{1\,000}{0.015}\left(1 - \frac{1}{1.04^{n}}\right)$$

$$1.05 = 1 - \frac{1}{1.04^{n}}$$

$$\frac{1}{1.04^{n}} = -0.05$$

Esta expresión no tiene solución. No hay ningún valor de n que la cumpla. La explicación lógica a esta aparente paradoja es sencilla: si la mensualidad no cubre siquiera los intereses, la deuda no sólo no se pagará nunca, sino que va a crecer.

Antes de la devaluación de diciembre de 1994 los bancos enfrentaban la siguiente situación: exceso de fondos prestables, altas tasas de interés y personas con bajos ingresos. La gran mayoría de los compradores potenciales de las casas no eran sujetos de crédito, porque sus ingresos eran insuficientes para pagar los intereses. Los bancos “resolvieron” este problema aparentemente insoluble introduciendo en escala masiva un esquema de *refinanciamiento*:*

El deudor que no puede pagar un abono mayor a los intereses que genera la deuda no es sujeto de crédito.

1. El cliente pagaba una mensualidad menor que el interés generado por la deuda.
2. Los intereses no pagados se capitalizaban, aumentando el monto de la deuda.
3. El incremento de la deuda primaria fue financiado por un crédito secundario, que se contrataba al mismo tiempo que el crédito primario.

*También conocido como hipoteca con tasa de interés ajustable.

Los ejecutivos bancarios explicaban a los clientes que de alguna manera la deuda que estaba creciendo todo el tiempo en el futuro iba a desaparecer. Nadie entendía cómo, pero el esquema parecía bastante atractivo.

Los hechos demostraron que el esquema de refinanciamiento, aplicado en gran escala, era muy arriesgado y a la postre resultó ser fatal para los bancos. No se sabe con certeza qué cálculos hicieron los bancos al aplicar este esquema. Sólo podemos conjeturar que el supuesto en que se fundamentaba el refinanciamiento era que en el futuro las tasas de interés iban a bajar y/o los ingresos de los deudores iban a subir. Después de la devaluación ocurrió exactamente lo contrario. Estalló la *crisis de la cartera vencida* y en 1995 todos los bancos mexicanos se encontraban en quiebra técnica. Los bancos fueron rescatados por Fobaproa,[1] pero el problema de la cartera vencida todavía no está resuelto.

El refinanciamiento es útil cuando el deudor enfrenta *problemas de liquidez*. Resulta inaceptable cuando el deudor no es sujeto de crédito.

Algunos deudores demandaron a los bancos ante los tribunales, alegando que el esquema de financiamiento no fue un error financiero, sino una trampa. Según este argumento, los bancos proponían a sus clientes un esquema incomprensible, pero que inevitablemente conducía a la insolvencia. El esquema de refinanciamiento nunca era viable, aumentaba la deuda en forma continua y tenía que desembocar en la suspensión de pagos. Según los abogados de los deudores, los bancos sabían todo esto y simplemente deseaban adjudicarse las garantías (las casas compradas con créditos hipotecarios). Si fuese así, los contratos no tienen valor legal, porque desde inicio se basaban en mala fe y en un afán de engaño.

Resulta difícil juzgar si el esquema de refinanciamiento en los créditos hipotecarios antes de 1995 fue un error financiero, o un esquema fraudulento por parte de los bancos. De cualquier manera es un buen ejemplo de que el desconocimiento de las matemáticas financieras puede conducir a situaciones desastrosas.

PAGO PERIÓDICO (FLUJO ANUAL EQUIVALENTE)

El *pago periódico* (o renta) es el flujo anual (periódico) equivalente al valor presente o al valor futuro. Su valor se puede obtener despejando *a* de las fórmulas del valor presente (o futuro) o calculando la variable PAGO en el módulo VTD de la calculadora financiera.

EJEMPLO 1

Un préstamo hipotecario de $200 000 a 10% debe ser liquidado en tres pagos anuales (al final de cada año). ¿Cuál debe ser el pago anual?

$$a = ?,\quad R = 0.1 \text{ anual},\quad n = 3 \text{ años}$$

Solución: El valor presente de las tres anualidades es:

$$200\,000 = \frac{a}{0.1}\left(1 - \frac{1}{1.1^3}\right) = a(2.4869)$$

[1] El Fobaproa (Fondo Bancario para la Protección del Ahorro) en 1999 fue sustituido por el IPAB (Instituto de Protección al Ahorro Bancario).

$$a = \frac{200\,000}{2.4869} = 80\,423$$

Respuesta: El pago anual es $80 423.

Secuencia en la calculadora financiera:

1 P.AÑ, MODO FINAL, CLEAR DATA, N = 3, %IA = 10, VA = 200 000

N	%IA	VA	PAGO	VF
3	10	200 000	?	0

Para obtener la respuesta pulsamos la tecla: PAGO = –80 422.96

La fórmula general para el pago periódico es:

$$a = \frac{R \cdot VPA}{\left[1 - \frac{1}{(1+R)^n}\right]} = \frac{R \cdot (1+R)^n \cdot VPA}{(1+R)^n - 1}$$

El concepto de *flujo anual equivalente* es muy útil para comparar anualidades de diferente duración (proyectos con vidas diferentes), o para comparar flujos de efectivo irregulares. En este último caso, llevamos todos los pagos al presente (o al futuro) y calculamos el flujo anual equivalente a los pagos irregulares. Dado que en el módulo F.CAJ de la calculadora financiera el flujo anual equivalente lleva el nombre de SNU (serie neta uniforme), de aquí en adelante utilizaremos SNU como sinónimo del flujo anual equivalente.

EJEMPLO 2

Un automovilista puede comprar una llanta normal que cuesta $250 y dura 40 000 kilómetros, o una llanta súper que cuesta $500 y dura 100 000 kilómetros. Mientras duran, las dos llantas ofrecen la misma seguridad y comodidad. La tasa de interés es de 15% anual. ¿Qué llanta debería seleccionar el automovilista?

Solución: Una revista del consumidor proporcionó una respuesta incorrecta. *La llanta súper es más económica porque cuesta menos por cada 1 000 kilómetros: $5 contra $6.25 de la llanta normal.* Esta respuesta es errónea porque ignora el valor del dinero en el tiempo. La respuesta correcta depende de cuántos kilómetros en promedio recorre el automovilista en un año.

Caso 1

Se supone que el recorrido de nuestro automovilista es de 10 000 kilómetros por año.

Ahora tenemos que convertir el precio de la llanta en un costo anual. Es necesario contestar la siguiente pregunta: ¿qué flujo de efectivo anual durante la vida de la llanta es equivalente al precio de la misma? Obviamente se trata de una anualidad en la cual el precio de la llanta es el valor presente de la anualidad y la vida de la llanta en años es el periodo.

$$VPA = \frac{a}{R}\left(1 - \frac{1}{(1+R)^n}\right)$$

Llanta normal: $n = 4$, $VPA = \$250$, $R = 15\%$

Sustituyendo estos datos despejamos la renta: $a = 87.56$

El costo anual de la llanta normal (costo anual equivalente) es de $87.56.

Tenemos aquí una importante ilustración del concepto de los *flujos equivalentes*: $250 ahora es equivalente a cuatro flujos de efectivo de $87.56, pagaderos al final de cada uno de los siguientes cuatro años. El vendedor de llantas, en vez de cobrar en efectivo, pudo haber cobrado una renta anual de $87.56 por el derecho de usar la llanta.

Alternativamente, si en vez de comprar la llanta, el automovilista hubiera depositado los $250 en una cuenta que rindiese 15% anual, habría recibido cuatro pagos anuales de $87.56 cada uno. Desde este punto de vista, $87.56 es el costo anual de la llanta (costo de oportunidad).

Ahora calculamos la renta equivalente para la llanta súper, utilizando en este caso la calculadora financiera:

1 NO.P AÑO, MODO FINAL, CLEAR DATA

N	%IA	VA	PAGO	VF
10	15	500	?	0

Al pulsar la tecla PAGO, obtenemos la respuesta: $99.63.

El costo anual de la llanta súper es de $99.63.

Respuesta 1: Si el recorrido anual es de 10 000 kilómetros, la llanta normal resulta más económica, porque su costo anual equivalente resulta más bajo.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Interpretación económica

La debilidad de la solución del ejemplo 2 es el uso de la tasa de interés nominal. Una tasa nominal alta incluye un fuerte componente de la inflación, por lo que es difícil suponer que se mantendrá constante en periodos prolongados. La inflación alta es, al mismo tiempo, inestable: igualmente puede subir o bajar. En nuestro caso, si la inflación subiera, la llanta más duradera hasta cierto punto nos protegería contra la inflación. Después de cuatro años no tendríamos que reemplazar la llanta a un precio seguramente mucho más alto que ahora. En un ambiente inflacionario puede ser preferible comprar productos más duraderos aunque sean más caros.

Desde el punto de vista de métodos para evaluar proyectos, el de las llantas es un caso de dos *proyectos mutuamente excluyentes con vidas diferentes*.

Caso 2

Repetiremos el cálculo para un automovilista que recorre 25 000 kilómetros al año.

Llanta normal: $n = {}^{40}/_{25} = 1.6$, $VPA = \$250$, $R = 15$ $\Rightarrow$ $a = 187.14$

Llanta súper: $n = 4$, $VPA = \$500$, $R = 15$ $\Rightarrow$ $a = 175.13$

Respuesta 2: Para un recorrido anual de 25 000 kilómetros la llanta súper es más económica.

EJEMPLO 3

Continuamos con el ejemplo 2. Los investigadores del productor de llantas descubrieron un método para prolongar la vida de la llanta súper a 125 000 kilómetros, pero el costo de producción sería más alto. Una investigación de mercado indica que un automovilista promedio recorre 25 000 kilómetros al año y $R = 15\%$. ¿Qué precio puede cobrar el productor por la nueva llanta súper extra?

Solución: Hay dos maneras de resolver el problema:

1. Para un automovilista promedio, la nueva llanta durará un año más (cinco en vez de cuatro). En el quinto año, la llanta proporcionará el servicio, cuyo valor anual es de \$175.13. El incremento del precio de la llanta no puede ser mayor que el valor presente de esta cantidad:

$$VP(175.13) = \frac{175.13}{1.15^5} = 87.07$$

2. ¿Cuál es el valor presente de una anualidad de \$175.13 que dura cinco años?

Utilizando la calculadora financiera, tenemos:

1 P.AÑ, MODO FINAL, N = 5, %IA = 15, PAGO = 175.13 $\Rightarrow$ VP = 587.07

Respuesta: El productor no puede cobrar por la nueva llanta más de \$587.07. Si cobra menos, la nueva llanta puede ser atractiva para un automovilista común. A precio de \$587.07 la nueva llanta sería rentable para los automovilistas que recorren más de 25 000 kilómetros al año. Si el costo adicional de la nueva llanta es menor de \$87.07, puede ser rentable iniciar la producción.

En el capítulo siguiente aprenderemos a resolver problemas como los de los ejemplos 2 y 3 utilizando el concepto de costo capitalizado.

TASA DE INTERÉS

Resulta imposible despejar la tasa de interés de la fórmula del valor futuro (o presente) de una anualidad. En estos casos se aplica un procedimiento de *tanteo* (prueba y error o aproximaciones sucesivas). Cuando los resultados ya se acercan al resultado correcto, se aplica el procedimiento de *interpolación*.

EJEMPLO 1

Un banco presta $2 401.8 a cambio de un pagaré en el cual uno se compromete a pagar $1 000 al final de cada uno de los tres años siguientes. ¿Qué tasa de interés está cobrando el banco?

$$VPA = 2401.8, \quad a = 1\,000, \quad n = 3, \quad R = ?$$

Solución: Utilizamos la fórmula del valor presente de una anualidad:

$$VPA_{R,3} = 2401.8 = \frac{1000}{R}\left(1 - \frac{1}{(1+R)^3}\right)$$

Ensayamos: $R = 0.11 \quad \Rightarrow \quad VPA_{0.11,3} = 2443.7$

$R = 0.13 \quad \Rightarrow \quad VPA_{0.13,3} = 2361.1$

Con base en estos dos ensayos podemos constatar que, puesto que el valor del préstamo (2 401.8) está en el intervalo (2 361.1, 2 443.7), la tasa de interés debería estar entre 11 y 13%, más o menos, entre estas dos tasas. Conjeturamos que la tasa correcta es $\boldsymbol{R} = 12\%$.

Efectivamente, si $R = 0.12 \quad \Rightarrow \quad PVA_{0.12,3} = 2401.8$

Respuesta: El banco cobra una tasa de 12%.

En la práctica no es tan fácil atinar. Las aproximaciones sucesivas e interpolaciones pueden ser muy molestas. Afortunadamente la tecnología viene al rescate. La calculadora financiera permite encontrar la tasa de interés de una anualidad si se tienen los valores de las demás variables. Las calculadoras científicas (*TI Voyage* 200) tienen la función *solve*, que permite introducir una ecuación y después calcular el valor de cualquiera de sus variables, si se proporcionan los valores de las variables restantes. También se pueden utilizar paquetes matemáticos para la computadora, como el *Maple*, u hojas de cálculo (*Excel*).

La secuencia de pasos para resolver el ejemplo 1 en la calculadora HP 17BII:

FIN, VDT, 1 P.AÑ, MODO FINAL, CLEAR DATA

N	%IA	VA	PAGO	VF
3	?	2 401.8	–1 000	0

Al pulsar la tecla $\boxed{\%IA}$ obtenemos la respuesta: 12.0008.

El procedimiento de aproximaciones sucesivas e interpolación se aplica sólo cuando no tenemos acceso a ninguna de las herramientas que proporciona la tecnología moderna.

En los anuncios de los diferentes planes de financiamiento típicamente no se menciona la tasa de interés, o la tasa de interés publicada no es la que verdaderamente pagará el cliente.

EJEMPLO 2

El anuncio para vender un automóvil proporciona la siguiente información:

Un atractivo precio de contado de $162 000, o $56 700 de enganche y 36 mensualidades fijas de $4 298. ¿Qué tasa de interés está cobrando el distribuidor?

$$n = 36, \quad a = 4\,298, \quad R = ?$$

Solución: El valor presente es el precio al contado menos el enganche:

$$VP = 162\,000 - 56\,700 = 105\,300$$

Ahora buscamos una tasa de interés que iguala el valor presente de $105 300 con 36 pagos mensuales de $4 298 cada uno.

Para encontrar la tasa de interés utilizamos la calculadora financiera:

FIN, **VDT**, 12 P.AÑ, MODO FINAL, CLEAR DATA

N	%IA	VA	PAGO	VF
36	?	105 300	–4 298	0

Al pulsar la tecla %IA obtenemos la respuesta: 26.98%.

Respuesta: El distribuidor de automóviles cobra una tasa de interés de 27% compuesta mensualmente. La tasa efectiva es de 30.58%.

Dado que en el momento de aparecer este anuncio de venta el rendimiento de los Cetes a un año era de 16%, con tendencia a la baja, la tasa de interés que cobra el distribuidor era bastante elevada.

EJEMPLO 3

En el mismo anuncio del ejemplo 2 se proporciona una alternativa llamada *Plan Multiopción*. Según este plan, el enganche es de $40 500, 24 mensualidades fijas de $3 936.92 y el valor futuro mínimo garantizado de $81 000. ¿Qué tasa de interés está cobrando el distribuidor?

$$n = 24, \quad a = 3\,936.92, \quad VF = 81\,000, \quad R = ?$$

Solución: El valor presente es el precio al contado menos el enganche:

$$VP = 162\,000 - 40\,500 = 121\,500$$

Ahora buscamos una tasa de interés que iguala el valor presente de $121 500 con 24 pagos mensuales de $3 936.92 más el pago final de $81 000.

FIN, **VDT**, 12 P.AÑ, MODO FINAL, CLEAR DATA

N	%IA	VA	PAGO	VF
24	?	121 500	−3 936.92	−81 000

Al pulsar la tecla %IA obtenemos la respuesta: 26%.

En realidad no sabemos qué significa la expresión "el valor futuro mínimo garantizado". Si el valor futuro es mayor, como consecuencia de una mayor inflación de la que se prevé ahora, la tasa de interés *ex post* también resultará mayor. Por ejemplo, si el pago de liquidación fuera de $100 000, la tasa de interés sería de 32.49%.

EJEMPLO 4

Un anuncio de Chrysler 300M, aunque un tanto confuso, sirve para ilustrar varios conceptos de matemáticas financieras. El anuncio dice: $318 700 al contado o 24 mensualidades de $12 102 más 35% de enganche con 18% de interés. ¿Es consistente este anuncio?

$$n = 24, \quad a = 12\,102, \quad R = 18\%$$

Solución: Primero calculamos que el valor presente de 24 mensualidades de $12 102 con la tasa de 18% es igual a $242 407.97. Dado que el enganche es de 35%, esta cantidad debe constituir el 65% del precio. Así, el precio debe ser:

$$0.65P = 242\,407.9 \qquad \Rightarrow \qquad P = 372\,935.33$$

Si el precio es de $372 935.33, el enganche debe ser de $(0.35) \cdot 372\,935.33 = 130\,527.37$. Si seleccionamos el plan de financiamiento dejamos de pagar la diferencia entre el precio al contado y el enganche:

$$318\,700 - 130\,527.37 = 188\,172.63$$

A cambio de ese ahorro nos comprometemos a pagar 24 mensualidades de $12 102. ¿Cuál es la tasa de interés que iguala el valor presente de $188 172.63 con 24 pagos de $12 102? Utilizando la calculadora financiera tenemos:

N	%IA	VA	PAGO	VF
24	?	188 172.63	−12 102	0

Al pulsar la tecla %IA obtenemos la respuesta: 45.71%.

La tasa de interés implícita en el anuncio es de 45.71% nominal, o sea 56.6% efectiva. Dado que los Cetes rinden sólo 16%, este resultado nos parece inverosímil. Para averiguar los datos acudimos a la página de Chrysler en internet y conseguimos la siguiente cotización, igualmente inconsistente:

CHRYSLER 300M 24 MESES 18.00% INTERÉS

Precio de lista:	\$342 078.70
Enganche:	\$127 220.80
Mensualidad:	\$12 105.95
Plazo:	24 meses

El enganche de 35% debería ser: 0.35(342 078.7) = 119 727.54. La diferencia se debe al seguro obligatorio en las compras a crédito. Incluso si el enganche fuera de \$119 727.54, es fácil demostrar que la tasa de interés sobre el saldo insoluto es mucho más alta que el 18% anunciado.

Seleccionando el plan de financiamiento dejamos de pagar la diferencia entre el precio al contado (no el precio de lista) y el enganche:

$$318\,700 - 119\,727.54 = 198\,972.45$$

A cambio de ese ahorro nos comprometemos a pagar 24 mensualidades de \$12 105.95. La tasa de interés que iguala el valor presente de \$198 972.45 con 24 pagos de \$12 105.95 es de 39.36%

La diferencia en las tasas de interés se debe a que Chrysler calculó su tasa con base en el precio de lista, mientras que el cliente que compara las alternativas al contado contra financiamiento debe tomar como base el precio al contado, que incluye un fuerte descuento.

La moraleja es que, al evaluar todo tipo de planes de financiamiento, uno debe ser muy cuidadoso y aplicar correctamente los principios de matemáticas financieras.

Cobro de intereses sobre el saldo inicial

EJEMPLO 5

Un anuncio en el periódico proporciona los siguientes datos:

Precio al contado: \$120 000, enganche: \$40 000, $n = 24$ meses, $a = 4\,533.33$ mensual, $R = 18\%$.

¿Es consistente este anuncio?

Solución: Introduciendo los datos del problema en el módulo VDT, tenemos:

FIN, **VDT**, 12 P.AÑ, MODO FINAL, CLEAR DATA

N	%IA	VA	PAGO	VF
24	?	−180 000	4 533.33	0

Al pulsar la tecla %IA obtenemos la respuesta: 31.45% (con la tasa de interés de 18% el pago mensual sería \$3 993.93).

¿Cómo calculó el autor del anuncio la mensualidad con la tasa de interés de 18%?

Respuesta: Cobró los intereses por anticipado, calculando todos los intereses sobre el saldo inicial. Esto viola la regla fundamental que dice que los intereses deben calcularse sobre el saldo insoluto.

$$\text{Interés total} = 0.18 \times 2 \text{ años} \times 80\,000 \text{ del saldo inicial} = 28\,800$$

$$\text{Pago mensual} = \frac{28\,800 + 80\,000}{24} = 4\,533.33$$

El cobro de intereses sobre el saldo inicial es un método para disfrazar la tasa de interés que se está cobrando en realidad. En nuestro ejemplo se está cobrando la tasa de 31.45%, pretendiendo que es apenas de 18%.

ANUALIDADES ANTICIPADAS

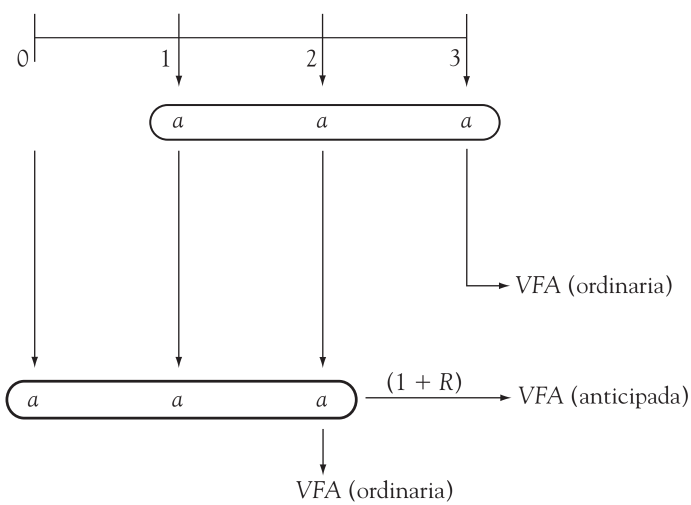
En el caso de las anualidades anticipadas los pagos se efectúan al principio de cada periodo. En la práctica hay pocas anualidades de este tipo. El cálculo de estas anualidades requiere una modificación de las fórmulas de las anualidades ordinarias. En todos los paquetes computacionales (y las calculadoras) hay que especificar cuándo se recibe el pago. El programa ya se encarga de modificar las fórmulas pertinentes. En la calculadora HP 17BII, por ejemplo, cambiamos el MODO FINAL al MODO INICIAL.

La anualidad anticipada es la anualidad ordinaria desplazada un periodo hacia adelante. En la anualidad anticipada cada pago tiene un periodo más en que producir intereses. En consecuencia, el valor futuro de una anualidad anticipada es el valor futuro de una anualidad ordinaria multiplicado por $(1 + R)$.

$$VFA_{\text{anticipada}} = (1 + R)VFA_{\text{ordinaria}}$$

Figura 6.1

El valor futuro de una anualidad anticipada es el valor futuro de una anualidad ordinaria llevado un periodo hacia el futuro [multiplicado por $(1 + R)$].



EJEMPLO 1

Un trabajador deposita $100 al principio de cada mes en una cuenta que rinde 2% mensual. ¿Cuál será su estado de cuenta el último día del año?

$$a = 100, \qquad R = 0.02, \qquad n = 12, \qquad VFA = ?$$

Solución: Si consideramos el día 1 de diciembre (cuando el trabajador hace su último depósito), el saldo de la cuenta será igual al valor futuro de una anualidad ordinaria.

$$VFA_{R=0.02,\, n=12} = a\,\frac{(1+R)^n - 1}{R} = 100\,\frac{(1.02)^{12} - 1}{0.02} - 1\,341.2$$

Durante diciembre, esta cantidad aumentará por el interés ganado en este mes:

$$1\,341.2(1 + 0.02) = 1\,368$$

Respuesta: El último día del año el saldo será de $1 368.

En la calculadora financiera seguimos esta secuencia de pasos:

En el módulo VDT pulsamos OTRO, INIC, EXIT; la pantalla debe decir:

1 NO.P AÑO, MODO INICIAL. Pulsamos CLEAR DATA e introducimos los datos.

N	%IA	VA	PAGO	VF
12	2	0	100	?

Al oprimir la tecla del menú VF obtenemos la respuesta correcta: 1 368.03.

Expresando simbólicamente lo que hicimos en el ejemplo 1, tenemos:

$$\boxed{VFA_{\text{anticipada}} = (1+R)\,\frac{a}{R}\left[(1+R)^n - 1\right] = a\left(\frac{1+R}{R}\right)\left[(1+R)^n - 1\right]}$$

En el caso del *valor presente de una anualidad anticipada* se procede en forma semejante.

EJEMPLO 2

Rentamos una casa por la cual tenemos que pagar $1 000 al principio de cada mes. Tenemos efectivo y deseamos averiguar cuánto hay que pagar para liquidar la renta anual con un solo pago el 1 de enero. La tasa de interés mensual es de 3%.

$$a = 1\,000, \quad R = 0.03, \quad n = 12, \quad VPA = ?$$

Solución: La renta del primer mes ya está en su valor presente. A ella hay que sumar el valor presente de las restantes 11 rentas, que se calcula aplicando la fórmula para el valor presente de una anualidad ordinaria (de 11 pagos).

$$VPA_{\text{anticipada}} = 1\,000 + \frac{1\,000}{0.03}\left(1 - \frac{1}{(1.03)^{11}}\right) = 1\,000 + 9252.6 = 10\,252.6.$$

Respuesta: Podemos liquidar la renta anual con un pago único de $10 252.6.

En la calculadora:

1 NO.P AÑO, MODO INICIAL, CLEAR DATA

N	%IA	VA	PAGO	VF
12	3	?	1 000	

Al oprimir la tecla del menú VF obtenemos la respuesta correcta: 10 252.62.

Expresando simbólicamente lo que hicimos en el ejemplo 1, obtenemos una fórmula para el *valor presente de una anualidad anticipada*:

$$\boxed{VPA_{\text{anticipada}} = a + \frac{a}{R}\left[1 - \frac{1}{(1+R)^{n-1}}\right]}$$

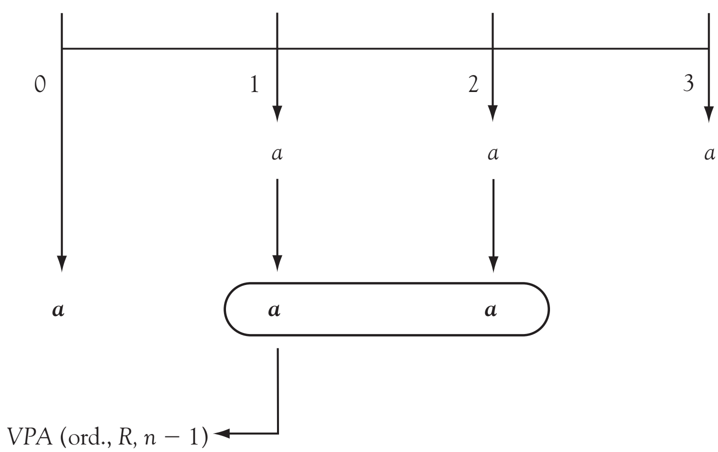


Figura 6.2

El valor presente de una anualidad anticipada es la suma del primer pago y el valor presente de una anualidad ordinaria en la cual el número de pagos es $n - 1$.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Calcule el valor presente de cinco pagos trimestrales de \$36 000, si la tasa de interés es de 14%. Los pagos deben hacerse al principio de cada trimestre.

Respuesta: \$168 230.3.

En la práctica, el cálculo de las anualidades puede ser bastante complicado. Existen posibilidades ilimitadas de combinación de diferentes casos. En el siguiente capítulo estudiaremos las anualidades más complicadas.

FÓRMULAS DEL CAPÍTULO

Valor presente	Valor futuro
Anualidad vencida $VPA_{R,n} = \frac{a}{R}\left[1-\frac{1}{(1+R)^n}\right]$	Anualidad vencida $VFA_{R,n} = \frac{a}{R}\left[(1+R)^n-1\right]$
Anualidad anticipada $VPA_{\text{ant}} = a+\frac{a}{R}\left[1-\frac{1}{(1+R)^{n-1}}\right]$	Anualidad anticipada $VFA_{\text{ant}} = (1+R)\frac{a}{R}\left[(1+R)^n-1\right]$

Términos clave

Anualidades anticipadas
Anualidades simple, ordinaria e inmediata
Cálculos en términos reales
Cartera vencida
Deudor sujeto de crédito
Flujo equivalente
Ilusión monetaria
Interpolación
Pago periódico
Plazo
Progresión geométrica
Refinanciamiento
Sensibilidad del valor futuro respecto a las tasa de interés
Valor futuro de una anualidad
Valor presente de una anualidad

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. ¿Qué cantidad acumularemos en ocho meses, si al finalizar cada mes efectuamos un pago de $1 000 en una cuenta que rinde 21.4% anual compuesto mensualmente?
2. Al final de cada mes, un trabajador hace un depósito de 1 000 Udis en su cuenta de retiro voluntario, que tiene un rendimiento garantizado de 5% anual, compuesto mensualmente. ¿Qué cantidad tendrá el trabajador en su cuenta después de 15 años?
3. Cada quincena un niño efectúa un depósito de $150 en su cuenta de ahorro que rinde 20%, compuesto quincenalmente. ¿De qué cantidad dispondrá el niño para sus vacaciones, después de 10 meses de ahorro?
4. El señor Vázquez quiere comprar un automóvil al contado. Estima que en un año y medio el automóvil que él desea costará $250 000 pesos. ¿Qué cantidad tendrá que ahorrar cada mes para comprar el automóvil en 18 meses, si su cuenta de ahorro le rinde 18% compuesto mensualmente?
5. Una empresa compró una máquina por $1 millón. La máquina se deprecia en línea recta en cinco años. Supongamos que el monto de la depreciación anual se invierte en un fondo que rinde 23% anual.
   a) ¿Qué cantidad se acumulará en cinco años?
   b) ¿Será suficiente esta cantidad para reemplazar la máquina, si durante los años siguientes el costo de este tipo de máquina crece en promedio a un ritmo de 15% anual?
6. Está usted haciendo una planificación de su retiro. La aportación bimestral de su patrón a la cuenta de retiro es de 1 500 Udis. Calcule el estado de su cuenta de retiro después de 30 años para tres escenarios posibles:
   a) El rendimiento de la cuenta será 4.5% durante todo el periodo.
   b) El rendimiento será de 4.5% en los primeros 10 años y 3.5% en el periodo restante.
   c) El rendimiento será de 4.5% en los primeros 10 años, 3.5% durante los siguientes 10 años y tan sólo 2% durante los últimos 10 años.
7. Un jubilado compra una anualidad de $80 000 anuales por 20 años. La aseguradora que vendió la anualidad se compromete a mantener el poder adquisitivo de la misma y utiliza la tasa de interés de 4%. ¿Qué cantidad pagó el jubilado por la anualidad?
8. Para comprar un automóvil es necesario hacer un pago inicial de $45 000 y 36 pagos mensuales fijos de 4 500 cada uno. ¿Cuál es el valor equivalente del automóvil al contado, si la tasa de interés es de 28% compuesto mensualmente?
9. En un semestre más su hijo empieza su carrera de nueve semestres en una universidad privada. El costo de la colegiatura, seguro y otras cuotas es de 12 000 Udis por semestre. ¿Cuánto le costará hoy un fideicomiso que pagará las colegiaturas de su hijo, si el rendimiento en Udis es de 4.5% anual?
10. Compra una casa con un crédito hipotecario de $400 000. La tasa de interés es de 30% anual. ¿Cuál debe ser el pago mensual si la hipoteca es por 25 años?

    Observación: Si la tasa de interés es variable, lo que calcula usted es la mensualidad inicial, mientras la tasa de interés no cambie.

11. En su cuenta en el fondo de jubilación de su empresa, el señor Ramírez acumuló $950 000. ¿Qué mensualidad (ajustada periódicamente por la inflación) puede ofrecerle el fondo durante los próximos 25 años, si el rendimiento promedio que genera el fondo es de 5.5% en términos reales?

12. Una empresa solicita un préstamo de $400 000 a un año. El préstamo será liquidado mediante 12 mensualidades, pagaderas al final de cada mes. La tasa de interés anual es de 48%.

    a) ¿Cuál es el monto de cada mensualidad?

    b) Al terminar de pagar su deuda, ¿qué cantidad habrá pagado la empresa por concepto de intereses?

13. Se contrató una deuda hipotecaria por $200 000 a 15 años a una tasa anual de 24%. Calcule el monto de la mensualidad.

14. Un *Jetta VR6* cuesta 100 000 Udis y puede recorrer 250 000 kilómetros. Un *Mercedes Clásico* cuesta 150 000 Udis y puede recorrer 500 000 kilómetros. Los Udis rinden 4% anual. Supongamos que el costo anual de mantenimiento (tenencia, seguro, gasolina, etc.) de los dos automóviles es igual.

    a) ¿Qué automóvil tiene un costo (anual) de adquisición más bajo para un automovilista que recorre 25 000 kilómetros al año?

    b) Calcule la tasa de interés para la cual son iguales las dos opciones.

15. Se pretende pagar una deuda de $100 000 con mensualidades de $3 500. La tasa de interés es de 3% mensual. ¿Cuántas mensualidades hay que pagar?

16. Para saldar una deuda de $80 000 hay que pagar 24 mensualidades de $5 000. ¿Cuál es la tasa de interés mensual?

17. Una aseguradora ofrece al candidato a jubilarse el siguiente trato: si paga hoy el equivalente de 200 000 Udis, durante los siguientes 25 años recibirá una renta mensual de 1 000 Udis. ¿Qué tasa de interés ofrece la aseguradora?

18. Usted recibe un préstamo de $30 000 a cambio del cual firma 20 pagarés de $2 000 cada uno, pagaderos al final de cada uno de los siguientes 20 meses. ¿Qué tasa de interés (nominal anual) está implícita en este trato?

19. ¿Cuántas quincenas es necesario hacer una aportación de 600 Udis para acumular un fondo de retiro de 400 000 Udis, si la cuenta de retiro rinde 5% anual, compuesto quincenalmente?

20. Usted compra un automóvil a crédito, incurriendo en una deuda de $120 000. ¿Cuántos pagos mensuales de $3 000 tiene que hacer para pagar su deuda, si el banco le cobra una tasa de 30% compuesta mensualmente?

21. Al principio de cada quincena, un trabajador hace un depósito de $500 en una cuenta que rinde 18%. ¿Cuánto se acumulará en la cuenta al final del año?

22. Usted desea reunir $150 000 mediante 18 pagos al principio de cada mes. ¿Cuál debe ser el pago, si la cuenta de ahorro rinde 16%?

23. La renta de una casa es $3 000 mensuales, pagaderos al principio de cada mes. ¿Qué cantidad puede liquidar la renta anual el 1 de enero, si la tasa de interés es de 28%?

24. El dueño de la casa le ofrece la siguiente opción: un pago anual de $30 000 el 1 de enero, o 12 pagos mensuales $3 000 cada uno al principio de cada mes. ¿Qué tasa de interés le está cobrando el casero en el caso de los pagos mensuales?

25. ¿Qué renta mensual al principio de cada mes es equivalente a un pago anual adelantado de $30 000, si la tasa de interés es de 28%?

Apéndice

ANUALIDADES IRREGULARES

Una anualidad que empieza en algún momento diferente que el fin del periodo 1 se llama *anualidad desplazada*. Una anualidad anticipada, por ejemplo, es un tipo de anualidad desplazada. Cuando los pagos empiezan después del fin del periodo 1, hablamos de *anualidades diferidas*.

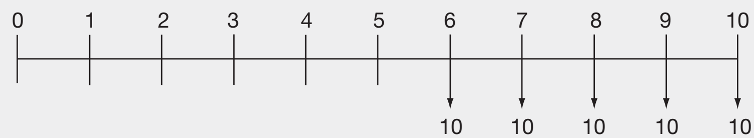
Una anualidad que, además de pagos regulares, tiene flujos irregulares en periodos diferentes se llama *anualidad con flujos aleatorios*.

Anualidades diferidas

EJEMPLO 1

Para amortizar una deuda necesitamos hacer cinco pagos mensuales de $10 000. El primer pago se efectuará en seis meses a partir de hoy. Calcule el valor presente de la deuda, si la tasa de interés es de 12% anual.

Primero dibujamos la línea de tiempo:



Una manera más sencilla de resolver este problema sería llevar todos los pagos al presente y sumarlos. Sin embargo, si el número de pagos es muy grande, este procedimiento es ineficiente. Un modo eficiente consiste en tratar los cinco pagos como una anualidad ordinaria y, una vez calculado su valor presente o futuro, desplazarlo hasta el periodo cero.

1. Calculamos el valor futuro de la anualidad en el periodo 10 y después lo llevamos al presente, descontando con un factor de descuento de 10 periodos.

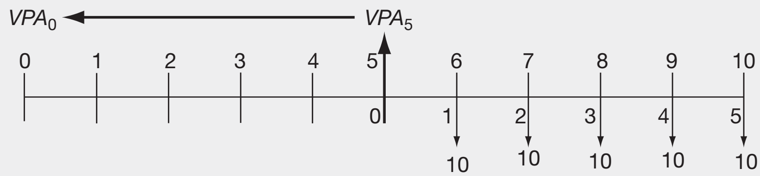
$$VPA = \frac{51\,010.05}{1.01^{10}} = 46\,178.73$$

2. Calculamos el valor presente de la anualidad en el periodo 5 y lo llevamos al periodo 0, descontado con un factor de descuento de cinco periodos.

$$VPA_5 = \frac{a}{R}\left[1 - \frac{1}{(1+R)^n}\right] = \frac{10\,000}{0.01}\left(1 - \frac{1}{1.01^5}\right) = 48\,534.3$$

$$VPA_0 = \frac{47\,134.59}{1.01^5} = 46\,178.73$$

Para conceptualizar mejor el procedimiento del método 2 renumeramos la línea de tiempo, de manera que el periodo 5 se convierta en el periodo 0.



Es muy importante que el estudiante ubique el valor presente de la anualidad ordinaria de cinco pagos en el periodo 5 y no en el periodo 6. Es una fuente de error muy frecuente.

ANUALIDADES CON PAGOS IRREGULARES

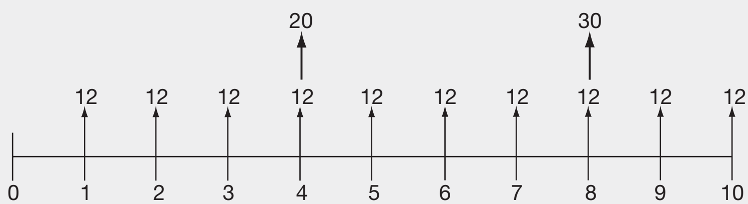
Algunas veces encontramos anualidades con pagos uniformes que además incluyen flujos irregulares en intervalos aleatorios. Para resolver este tipo de series complejas tenemos que descomponerlas en series estándar, calcular el valor presente (o futuro) de cada una y sumar los resultados.

El método consiste en los siguientes pasos:

1. Dibujar cuidadosamente la línea de tiempo, destacando los pagos irregulares con una flecha más larga o más gruesa.
2. Llevar todos los flujos irregulares al presente (o futuro).
3. Calcular el valor presente (o futuro) de los flujos regulares y, si la serie es desplazada, llevar este valor al periodo 0.
4. Sumar los valores de todos los flujos en el mismo periodo.

EJEMPLO 2

El dueño de 50 hectáreas de un valioso bosque pide por su venta el siguiente flujo de efectivo: 10 pagos anuales de $12 000 al final de cada uno de los siguientes 10 años y, además, al final del cuarto año una cantidad de $20 000 y al final del año 8, $30 000. ¿Cuál es el valor presente del bosque, si la tasa de interés es de 8% anual?



Como se puede apreciar en la línea de tiempo, la anualidad compleja consiste en tres series simples:

1. 10 pagos anuales de $12 000 cada uno,
2. Un pago de $20 000 al final del cuarto año, y
3. Un pago de $30 000 al final del octavo año.

Ahora calculamos el valor presente de cada una de estas series:

1. $VPA_{101,\ 2000,\ 8\%} = \dfrac{12\,000}{0.08}\left(1 - \dfrac{1}{1.08^{10}}\right) = 80\,520.98$

2. $VP(20000) = \dfrac{20\,000}{1.08^{4}} = 14\ 700.6$

3. $VP(30\,000) = \dfrac{30\,000}{1.08^{8}} = 16\,208.07$

Sumando estos tres valores, obtenemos la respuesta: $111 429.64.

Respuesta: El valor presente del bosque es de $111 429.64.

Una vez que tengamos el valor presente (o futuro) de una serie irregular es muy fácil convertirla en una serie regular.

EJEMPLO 3

¿Cuál es el pago anual equivalente (SNU) a los flujos de efectivo del ejemplo 2?

Para resolver este problema utilizamos la calculadora financiera:

1 NO.P AÑO, MODO FINAL

N	%IA	VA	PAGO	VF
10	8	111 429.64	?	0

Al pulsar la tecla PAGO obtenemos la respuesta: $16 606.3.

Respuesta: Recibir 10 pagos de $12 000 más dos pagos irregulares es equivalente a recibir 10 pagos de $16 606.3 cada uno.

También podemos transformar una anualidad desplazada en una regular con un mayor número de pagos, pero que empiezan inmediatamente.

EJEMPLO 4

Transforme la anualidad diferida de cinco pagos del ejemplo 1 en una anualidad ordinaria de 10 pagos mensuales.

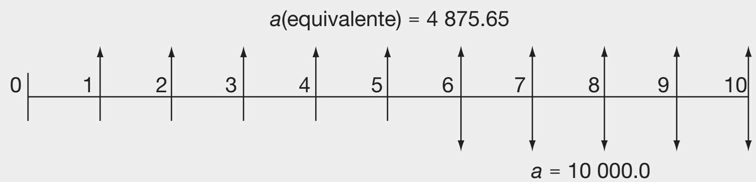
Se trata de convertir el valor presente de la anualidad diferida de $46 178.73 en 10 pagos mensuales que empiezan al final del primer mes. Resulta más fácil hacerlo en la calculadora financiera.

1 NO.P AÑO, MODO FINAL

N	%IA	VA	PAGO	VF
10	2	46 178.73	?	0

Al pulsar la tecla PAGO obtenemos la respuesta: $4 875.65.

En la siguiente línea de tiempo presentamos gráficamente el concepto de equivalencia entre los dos flujos:



Dos flujos de efectivo son equivalentes si tienen el mismo valor económico.

Respuesta: 10 pagos de $4 875.65 que empiezan al final del primer mes son equivalentes a cinco pagos de $10 000 que empiezan al final del sexto mes.

El concepto de *equivalencia* es fundamental en las matemáticas financieras. Se refiere a diferentes cantidades de dinero en diferentes momentos que tienen el mismo valor económico.

CAPÍTULO 7

Anualidades:

pagos crecientes, rentas perpetuas, pagos desiguales

Objetivos del aprendizaje

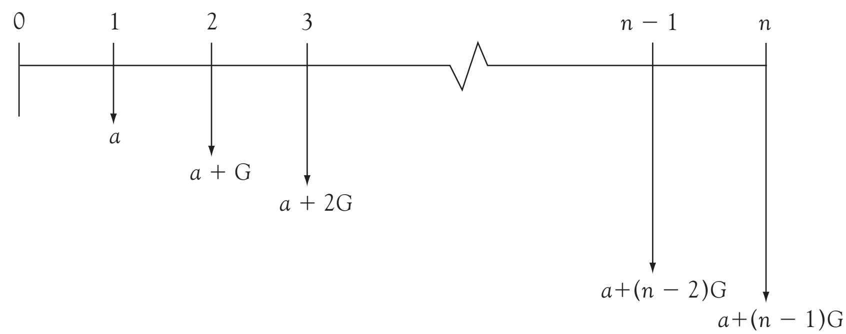
Después de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

- Resolver problemas de anualidades con pagos crecientes en una cantidad constante, G.
- Desarrollar y aplicar fórmulas para anualidades con pagos crecientes a un ritmo constante g.
- Transformar la fórmula del valor presente de una anualidad en la fórmula de perpetuidad.
- Obtener la fórmula de una perpetuidad en la cual la renta crece a una tasa g.
- Interpretar la perpetuidad como un depósito a una tasa fija, del cual sólo se retiran los intereses.
- Hacer una distinción entre la renta perpetua y la renta vitalicia.
- Emplear el concepto de costos capitalizados para comparar proyectos con vidas diferentes.
- Calcular el valor presente y el valor futuro de una serie de pagos desiguales.
- Entender los conceptos fundamentales de la evaluación de proyectos.

ANUALIDADES CON PAGOS CRECIENTES: GRADIENTE ARITMÉTICO

Cuando los pagos de una anualidad aumentan según la progresión aritmética, se habla de un *gradiente uniforme*. El gradiente es la diferencia entre dos pagos consecutivos. El primero se llama *pago base*; el segundo, pago base más el gradiente; el tercero, pago base más dos gradientes, etc. El *gradiente convencional* se apega a la convención del fin del periodo, esto significa que el primer pago se produce al final del periodo 1.

Para calcular el valor presente de un gradiente es necesario separar los pagos base de los gradientes y calcular la suma de los dos por separado. Antes de sumar, observemos el flujo de caja de un gradiente convencional:

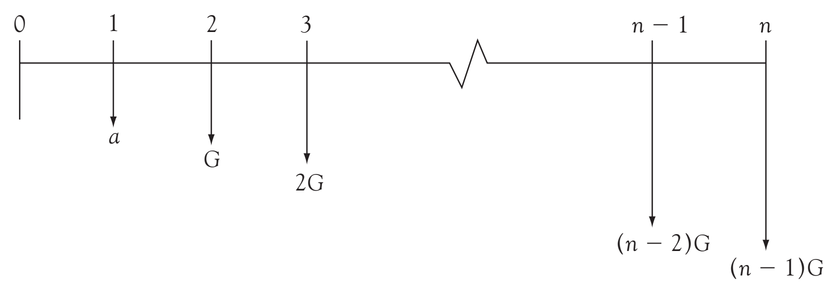


a es el pago base; G es el gradiente (la diferencia común entre dos términos).

Si ignoramos los gradientes, la línea de tiempo representa simplemente una anualidad ordinaria, con pago periódico *a* y con el plazo *n*. Su valor presente es:

$$VPA_{a,R,n} = \frac{a}{R}\left[1 - \frac{1}{(1+R)^n}\right]$$

Si ignoramos los pagos base, el diagrama de puros gradientes es como sigue:



El valor presente de los gradientes, VP(G), es la suma de los valores presentes de cada uno de ellos:

$$VP(G)=\frac{G}{(1+R)^2}+\frac{2G}{(1+R)^3}+\frac{3G}{(1+R)^4}+\cdots+\frac{(n-2)G}{(1+R)^{n-1}}+\frac{(n-1)G}{(1+R)^n}$$

Ahora multiplicamos ambos lados de esta ecuación por $(1 + R)$:

$$(1+R)VP(G)=\frac{G}{(1+R)^1}+\frac{2G}{(1+R)^2}+\frac{3G}{(1+R)^3}+\cdots+\frac{(n-2)G}{(1+R)^{n-2}}+\frac{(n-1)G}{(1+R)^{n-1}}$$

Al restar la primera ecuación de la segunda, tenemos:

$$R\times VP(G)=\frac{G}{1+R}+\frac{G}{(1+R)^2}+\frac{G}{(1+R)^3}+\cdots+\frac{G}{(1+R)^{n-1}}+\frac{G}{(1+R)^n}-\frac{nG}{(1+R)^n}$$

Sin el último término, el lado derecho es una serie geométrica decreciente, cuya suma es:

$$\frac{G}{1+R}+\frac{G}{(1+R)^2}+\cdots+\frac{G}{(1+R)^{n-1}}+\frac{G}{(1+R)^n}=\frac{G}{R}\left[1-\frac{1}{(1+R)^n}\right]$$

Al utilizar este resultado, factorizando G y dividiendo ambos lados entre R, obtenemos la fórmula del *valor presente del gradiente*:

$$VP(G)=\frac{G}{R}\left[\frac{(1+R)^n-1}{R(1+R)^n}-\frac{n}{(1+R)^n}\right]$$

Las formas alternativas de escribir el valor presente del gradiente son:

$$VP(G)=\frac{G}{R(1+R)^n}\left[\frac{(1+R)^n-1}{R}-n\right]=G\cdot\left[\frac{(1+R)^n-nR-1}{R[1+R]^n}\right]$$

La fórmula ya es bastante complicada, pero aún no terminamos. El valor presente de una anualidad, cuyos pagos crecen según una progresión aritmética, es la suma del valor presente de la anualidad de los pagos base y el valor presente de los gradientes:

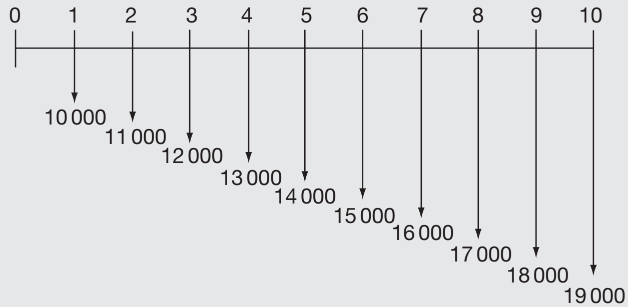
$$\boxed{VPA_{\text{Grad. arit.}}=\frac{a}{R(1+R)^n}\left[(1+R)^n-1\right]+\frac{G}{R(1+R)^n}\left[\frac{(1+R)^n-1}{R}-n\right]}$$

EJEMPLO 1

La vida útil de una máquina es de 10 años. Al final del primer año el costo de mantenimiento de la máquina es de $10 000. Se supone que el costo de mantenimiento crecerá $1 000 cada uno de los siguientes nueve años. ¿Cuál es el valor presente del costo de mantenimiento de la máquina, si la tasa de interés es de 12%?

$$a = 10000, \quad G = 1000, \quad n = 10, \quad R = 12\%.$$

Solución: La línea de tiempo nos permite visualizar los pagos por concepto de mantenimiento:



Al sustituir los datos del problema en la fórmula, tenemos:

$$VP = \frac{10\,000}{0.12}\left[1 - \frac{1}{1.12^{10}}\right] + \frac{1\,000}{0.12}\left[\frac{1.12^{10} - 1}{0.12(1.12)^{10}} - \frac{10}{1.12^{10}}\right] =$$

$$= 56\,502.23 + 20\,254.09 = 76\,756.32$$

Respuesta: El valor presente del costo de mantenimiento de la máquina es de $76 756.32.[1]

Una manera alternativa de resolver este problema es sumar el valor presente de todos los costos:

$$VP = \frac{10\ 000}{1.12} + \frac{11\ 000}{1.12^2} + \frac{12\ 000}{1.12^3} + \frac{13\ 000}{1.12^4} + \frac{14\ 000}{1.12^5} + \frac{15\ 000}{1.12^6} + \frac{16\ 000}{1.12^7} + \frac{17\ 000}{1.12^8}$$
$$+ \frac{18\ 000}{1.12^9} + \frac{19\ 000}{1.12^{10}} = 76\ 756.32$$

Este tipo de suma es muy fácil de hacer en una hoja de cálculo. Se invita al lector a que lo haga. Además, deberá utilizar el módulo F.CAJ de la calculadora financiera para comprobar el resultado. Este ejercicio le servirá también para verificar qué método se ajusta mejor a sus preferencias.

[1] En esta solución se supone que al final del año 10 también se hace un mantenimiento, cuyo costo es de $19 000, posiblemente con el objetivo de obtener un mayor precio de rescate.

Una manera tal vez más elegante de resolver el problema del gradiente aritmético es convertirlo en un *pago periódico uniforme equivalente*, que designaremos $a(G)$. Para lograr esto es necesario comparar la fórmula del valor presente del gradiente con el valor presente de una anualidad de pagos uniformes.

$$\frac{G}{R}\cdot\left[\frac{(1+R)^n-1}{R\cdot(1+R)^n}-\frac{n}{(1+R)^n}\right]=\frac{a(G)}{R}\cdot\left[1-\frac{1}{(1+R)^R}\right]$$

donde $a(G)$ es un pago periódico uniforme equivalente al gradiente geométrico.

$$\boxed{a(G)=G\cdot\left[\frac{1}{R}-\frac{n}{(1+R)^n-1}\right]}$$

La expresión entre corchetes se llama *factor del valor anual del gradiente uniforme* (*uniform-gradient annual-value factor*).

Para resolver el problema 1 con este método primero calculamos el costo anual uniforme equivalente al gradiente aritmético.

$$a(G)=1000\cdot\left[\frac{1}{0.12}-\frac{10}{1.12^{10}-1}\right]=3\,584.653$$

Al sumar esta cantidad al pago base: 10 000 + 3 584.65 = 13 584.65 obtenemos un costo anual uniforme equivalente al costo base más el gradiente aritmético.

Si se sustituye este valor en la fórmula del valor presente de anualidad resulta:

$$VPA=\frac{13\,584.65}{0.12}\cdot\left[1-\frac{1}{1.12^{10}}\right]=76\,756.32$$

Para obtener la fórmula del valor futuro de un gradiente aritmético multiplicamos la fórmula del valor presente por $(1 + R)^n$:

$$VF(G)=\frac{G}{R}\left[\frac{(1+R)^n-1}{R}-n\right]$$

El *valor futuro de una anualidad cuyos pagos crecen según una progresión aritmética* es la suma del valor futuro de los pagos base y el valor futuro del gradiente:

$$\boxed{VFA_{\text{Grad.arit.}}=\frac{a}{R}\left[(1+R)^n-1\right]+\frac{G}{R}\left[\frac{(1+R)^n-1}{R}-n\right]}$$

EJEMPLO 2

¿Cuál es el valor futuro del costo de mantenimiento de la máquina del ejemplo 1?

$$a = 10\,000, \qquad G = 1\,000, \qquad n = 10, \qquad R = 12\%$$

Solución: Al sustituir los datos del problema en la fórmula, tenemos:

$$VF = \frac{10\,000}{0.12}\left[1.12^{10} - 1\right] + \frac{1\,000}{0.12}\left[\frac{1.12^{10} - 1}{0.12} - 10\right] =$$

$$= 175\,487.35 + 62\,906.13 = 238\,393.48$$

Respuesta: El valor futuro del costo de mantenimiento de la máquina es de \$238 393.48.

Obviamente, pudimos haber obtenido el mismo resultado multiplicando el valor presente por 1.12^{10}.

EJEMPLO 3

Hoy hace un depósito de \$1 000 en su nueva cuenta de ahorro. Cada mes aumenta su aportación en \$100. ¿Cuánto se habrá acumulado en su cuenta de ahorro después de seis años, si la cuenta rinde 18% anual? Su última aportación es un mes antes de pedir el saldo.

$$a = 1\,000, \qquad G = 100, \qquad n = 72 \text{ meses}, \qquad R = 1.5\% \text{ mensual}$$

Solución: Este es un caso de anualidad de pagos crecientes según la progresión aritmética, con la complicación de tratarse de una anualidad anticipada. El valor futuro de esta anualidad es la suma del valor futuro de los pagos base y el del gradiente. Primero calculamos el valor futuro de los pagos base:

$$VFA_{ant} = 1.015\,\frac{1\,000}{0.015}\cdot\left(1.015^{72} - 1\right) = 129\,998.36$$

Ahora calculamos el valor futuro del gradiente:

$$VFG = \frac{100}{0.015}\left(\frac{1.015^{72} - 1}{0.015} - 72\right) = 373\,847.98$$

Este valor se producirá en el mes 49, junto con el último pago. Para calcular el valor del gradiente en el mes 50 tenemos que multiplicar nuestro resultado por 1.015. El valor del gradiente en el mes 50 es de \$379 455.7. Al sumar éste al valor futuro de los pagos base obtenemos el valor futuro de sus ahorros:

$$129\,998.36 + 379\,455.7 = 509\,454.1$$

Respuesta: Después de seis años el saldo de su cuenta de ahorros será de \$509 454.1.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Gradiente aritmético como ecuación en diferencias

Para personas más avanzadas en matemáticas resulta más fácil tratar el problema del gradiente aritmético como una ecuación en diferencias. Al final del periodo *t* el saldo es la suma del saldo del periodo anterior, más el interés que ganó este saldo, más el pago base, más el gradiente del periodo.

$$P_{t+1} = P_t + RP_t + a + Gt$$

Si reordenamos los términos obtenemos una ecuación en diferencias lineal de primer orden con un coeficiente constante y un término variable:

$$P_{t+1} - (1+R)P_t = a + Gt \tag{1}$$

La solución general consiste en la suma de la solución particular y la solución complementaria. La solución complementaria es la solución de la versión homogénea de la ecuación:

$$P_c = C(1+R)^t$$

donde C es una constante arbitraria.

Para encontrar la solución particular podemos utilizar la siguiente solución de ensayo:

$$P_t = A + Bt$$

donde A y B son coeficientes por determinar.

En este caso $P_{t+1} = A + B(t+1) = A + Bt + B$

Al sustituir la solución de ensayo a la ecuación (1) tenemos:

$$A + Bt + B - (1+R)(A+Bt) = B - RA - RBt = a + Gt$$

Al comparar los términos iguales obtenemos un sistema de ecuaciones cuya solución son los coeficientes A y B.

$$\left.\begin{aligned} B - RA &= a \\ -RB &= G \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} A &= -\frac{1}{R}\left(\frac{G}{R} + a\right) \\ B &= -\frac{G}{R} \end{aligned}\right.$$

Así, la solución particular es: $\quad P_p = -\frac{1}{R}\frac{G}{R} - \frac{a}{R} - \frac{G}{R}t$

La solución general es la suma de la solución particular y la solución complementaria:

$$P_t = C(1+R)^t - \frac{1}{R}\frac{G}{R} - \frac{a}{R} - \frac{G}{R}t$$

Cuando $t = 0 \qquad C = P_0 + \frac{1}{R}\frac{G}{R} + \frac{a}{R}$

La solución definida es: $P_t = \left[P_0 + \frac{1}{R}\left(\frac{G}{R} + a\right)\right](1+R)^t - \frac{1}{R}\left(\frac{G}{R} + a + Gt\right)$

Cuando el saldo inicial es cero, $P_0 = 0$, la solución se puede escribir como:

$$P_t = \frac{a}{R}\left[(1+R)^t - 1\right] + \frac{G}{R}\left[\frac{(1+R)^t - 1}{R} - t\right]$$

Obviamente es la misma fórmula que obtuvimos al sumar las series.

Al lector puede interesarle la cantidad del último pago. Para contestar a esta inquietud necesitamos desarrollar la fórmula para el n-ésimo término de la progresión aritmética. Esto se logra al observar los términos sucesivos.

$a_1 = a$ el primer término es el pago base,
$a_2 = a + G$ el segundo término es el pago base más un gradiente,
$a_3 = a + 2G$ el tercer término es el pago base más dos gradientes,
....
$\boldsymbol{a_n = a + (n - 1)G}$ n-ésimo término es el pago base más $(n - 1)$ gradientes.

Al sustituir los datos del problema en esta fórmula se obtiene el valor del término número 50:

$$a_{50} = 1\,000 + (50 - 1)100 = 5\,900$$

Así, la última aportación a su cuenta de ahorro es de $5 900.

EJEMPLO 4

Se otorga un préstamo de $150 000 a 24%. El préstamo debe ser pagado mediante 36 pagos mensuales, cada mensualidad será $300 mayor que la anterior. ¿Cuál será el importe del primer pago?

$$G = 300, \quad n = 36 \text{ meses}, \quad R = 2\,\% \text{ mensual}, \quad a = ?$$

Solución: El valor de la primera mensualidad se despeja de la fórmula del valor presente del gradiente aritmético:

$$150\,000 = \frac{a}{0.02}\left[1 - \frac{1}{1.02^{36}}\right] + \frac{300}{0.02}\left[\frac{1.02^{36} - 1}{0.02(1.02)^{36}} - \frac{36}{1.02^{36}}\right]$$

Al resolver esta ecuación respecto de a, hallamos que $a = 1\,270.67$.

Respuesta: El primer pago es de $1 270.67.

¿Cuál será la cantidad del último pago?

$$a_{36} = 1\,270.67 + 35(300) = 11\,770.67$$

La suma de los pagos es: $\dfrac{36(1\,270.67 + 11\,770.67)}{2} = 234\,744.12$

Si la deuda se liquida con pagos iguales, el pago mensual sería de \$5 884.93 y la suma de los pagos sería de 211 857.4. La suma de los pagos con el gradiente aritmético es mayor porque se concentran cerca del vencimiento.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Las ventas de una empresa son de \$50 000. En virtud de un programa de introducción de nuevos productos, la empresa espera elevar sus ventas a \$100 000 en cinco años. Se supone que las ventas anuales crecerán según una progresión aritmética. *a*) Determine el flujo base, el gradiente, y dibuje el diagrama de tiempo de las ventas esperadas. *b*) Calcule el valor presente de las ventas futuras esperadas, si la tasa de interés es de 10%.

Respuestas: *a*) $a = 60\,000$, $G = 10\,000$, *b*) $VP = \$296\,065.22$.

ANUALIDADES CON PAGOS CRECIENTES: GRADIENTE GEOMÉTRICO

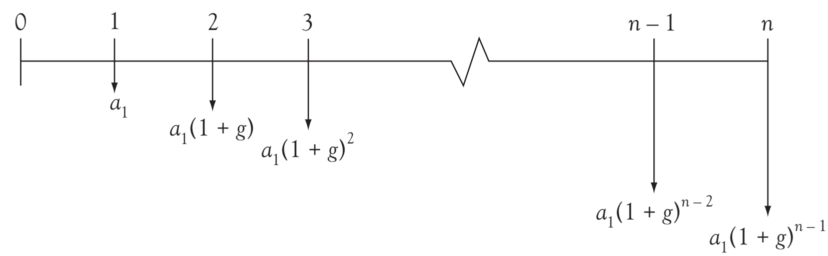
En muchos casos el pago periódico aumenta en forma exponencial, a una tasa de crecimiento constante. Las anualidades cuyos pagos periódicos forman una progresión geométrica reciben el nombre de *gradiente geométrico*, o serie en escalera:

$$a_t = a_0(1 + g)^t$$

donde:

donde:	a_t	es el valor del pago en el periodo t,
	a_0	es el valor del pago inicial,
	g	es la tasa de crecimiento del pago,
	$(1 + g)$	es la razón común de la progresión geométrica,
	t	es el número del periodo.

En el caso de una anualidad ordinaria (vencida), el primer pago es a_1. Este pago se da al final del primer periodo. Es un equivalente del *pago base* del gradiente aritmético. Un equivalente del gradiente es el multiplicador $(1 + g)^t$. La línea de tiempo del gradiente geométrico aclara la situación:



El valor presente de una anualidad de pagos crecientes es la suma de los valores presentes de todos los pagos.

$$VPA = \frac{a_1}{1+R} + \frac{a_1(1+g)^1}{(1+R)^2} + \frac{a_1(1+g)^2}{(1+R)^3} + \cdots + \frac{a_1(1+g)^{n-1}}{(1+R)^n}$$

Al factorizar el primer elemento de la suma, tenemos:

$$VPA = \frac{a_1}{1+R}\left[1 + \frac{1+g}{1+R} + \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^{n-1}\right]$$

La expresión entre corchetes es la suma de una progresión geométrica (creciente o decreciente, dependiendo de si $g > R$, o viceversa). Al sumar tenemos:

$$1 + \frac{1+g}{1+R} + \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^{n-1} = \frac{1+R}{R-g}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^n\right]$$

Al multiplicar esta expresión por el elemento factorizado, obtenemos la fórmula para el *valor presente de una anualidad con pagos crecientes a un ritmo constante*, g, caso $R > g$:

$$\boxed{VPA = \frac{a_1}{R-g}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^n\right]}$$

donde: $a_1 = a_0(1 + g)$ es el pago al final del primer periodo.

Cuando la tasa de crecimiento del pago periódico es mayor que la tasa de interés, $g > R$, la fórmula para el valor presente de una anualidad con pagos crecientes a un ritmo constante toma la siguiente forma:

$$VPA = \frac{a_1}{g-R}\left[\left(\frac{1+g}{1+R}\right)^n - 1\right]$$

Las dos fórmulas del valor presente del gradiente geométrico son totalmente equivalentes. El único objetivo de invertir el orden de los términos es evitar los signos negativos.

EJEMPLO 1

¿Cuánto puede pagar por una anualidad de 20 pagos, si el primer pago (al final del primer año) es de $100 000 y cada pago siguiente será 15% mayor que el anterior? La tasa de interés que ofrece la aseguradora es de 20%.

$$a_1 = 100\,000, \quad n = 20, \quad R = 20\%, \quad g = 15\%$$

Solución: Al sustituir los datos del problema en la fórmula, tenemos:

$$VPA = \frac{100\,000}{0.2 - 0.15}\left[1 - \left(\frac{1.15}{1.2}\right)^{20}\right] = 1146\,188.73$$

Respuesta: El valor presente de los 20 pagos crecientes es de $1 146 188.73.

Reflexiones sobre matemáticas financieras

Anualidad creciente en la calculadora financiera

Para calcular el valor presente de una anualidad creciente en la calculadora financiera es necesario hacer las siguientes modificaciones. Como tasa de interés se introduce el resultado de la siguiente ecuación: $\%\text{IA} = \left(\frac{1+R}{1+g} - 1\right) \cdot 100$. En lugar de pago se mete: $\text{PAGO} = \frac{a_1}{1+g}$. Utilizando estas modificaciones en el ejemplo 1, tenemos: $\%\text{IA} = \left(\frac{1.2}{1.15} - 1\right) \cdot 100 = 4.3478$ $\text{PAGO} = \frac{100\,000}{1.15} = 86\,956.52$

N	%IA	VA	PAGO	VF
20	4 3478	?	86 956.52	0

Al oprimir la tecla $\boxed{\text{VA}}$ obtenemos la respuesta: 1 146 188.73, que es el valor presente de la anualidad creciente.

En el ejemplo 1 los pagos crecen a un ritmo anual de 15%, probablemente, para conservar el poder adquisitivo de los mismos. Esto sugiere que en el periodo en cuestión la inflación anual es de 15% y la tasa de interés de 20% es la tasa nominal. El valor presente calculado con la fórmula para el valor presente de una anualidad con pagos crecientes es el *valor a precios del periodo cero*, porque para comprar esta anualidad es necesario pagar por ella inmediatamente (en el periodo cero).

Una manera alternativa de enfocar el ejemplo 1 es utilizar la tasa de interés real, que es de 4.35% (1.2/1.15 – 1). En este caso tenemos que calcular el valor presente de una anualidad de 20 pagos constantes de $100 000 con la tasa de interés de 4.35%.

En la calculadora financiera utilizamos la siguiente secuencia de pasos:

1 P.AÑ, MODO FINAL, CLEAR DATA

N	%IA	VA	PAGO	VF
20	4.3478	?	100 000	0

Al oprimir la tecla $\boxed{\text{VA}}$ obtenemos la respuesta: 1 318 117.04, que es el valor presente de la anualidad a precios del fin del periodo 1. Dado que la inflación en el periodo 1 fue de 15% (como en todos los demás periodos), para calcular el valor presente a precios del periodo cero, tenemos que dividir esta cantidad entre 1.15. Así obtenemos 1 146 188.73, igual que en el ejemplo 1.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Equivalencia entre el cálculo en términos reales y el uso del gradiente geométrico, en el cual el pago periódico crece al ritmo de la inflación

Supongamos que el pago periódico crece al mismo ritmo que la inflación: $g = i$

Según la regla de Fisher $\frac{1+R}{1+i} = 1 + r$, donde r es la tasa de interés real.

Así, la fórmula del valor presente del gradiente geométrico se convierte en:

$$VPA = \frac{a_1}{R-g}\left[1-\left(\frac{1+g}{1+R}\right)^n\right] = \frac{a_1}{R-i}\left[1-\frac{1}{\left(\frac{1+R}{1+i}\right)^n}\right] + \frac{a_1}{R+i}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

Para expresar esta fórmula en términos de la tasa real, hacemos la siguiente transformación:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\frac{1+R}{1+i}-1} = \frac{1+i}{R-i} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{R-i} = \frac{1}{r(1+i)}$$

Al utilizar este resultado obtenemos la fórmula para el valor presente a precios constantes de los pagos que crecen al ritmo de la inflación.

$$VPA(\text{real}) = \frac{a_1}{r(1+i)}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

Dado que el primer pago a precios de hoy es $\frac{a_1}{1+i} = a_0$, podemos escribir la fórmula como:

$$VPA(\text{real}) = \frac{a_0}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

Al sustituir los datos del problema 1, tenemos:

$$VPA = \frac{100\,000}{0.04347(1.15)}\left[1-\frac{1}{1.04347^{20}}\right] = 1\,146\,188.73$$

Es el mismo resultado que el obtenido con la fórmula del gradiente geométrico.

EJEMPLO 2

Una deuda debe cancelarse mediante cinco pagos anuales. El primer pago es de $50000 y cada pago posterior será 20% mayor que el primero. ¿Cuál es el valor presente de la deuda, si la tasa de interés es de 16%?

$$a_1 = 50000, \quad n = 5, \quad R = 16\%, \quad g = 20\%$$

Solución: Ahora utilizamos la versión de la fórmula, cuando $g > R$:

$$VPA = \frac{50\,000}{0.2 \cdot 0.16}\left[\left(\frac{1.20}{1.16}\right)^5 - 1\right] = 230\,901.92$$

Respuesta: La deuda es de $230901.92.

Para calcular el *valor futuro de la anualidad de pagos crecientes*, multiplicamos el valor presente por $(1+R)^n$.

$$\boxed{VFA = VPA\,(1+R)^n = \frac{a_1}{R-g}\left[(1+R)^n - (1+g)^n\right]}$$

Cuando la tasa de crecimiento del pago periódico es mayor que la tasa de interés, $g > R$, la fórmula para el valor futuro de una anualidad con pagos crecientes toma la siguiente forma:

$$VFA = \frac{a_1}{g-R}\left[(1+g)^n - (1+R)^n\right]$$

A precios constantes (en términos reales), la fórmula del valor presente de la anualidad de pagos crecientes al ritmo de la inflación es:

$$VFA(\text{precios constantes}) = \frac{a_1}{r(1+i)}\left[(1+r)^n - 1\right]$$

Dado que $\frac{a_1}{1+i} = a_0$, se trata de la conocida fórmula del valor presente de una anualidad de pagos constantes (en términos del poder adquisitivo), donde el primer pago es deflactado al periodo cero y la tasa de interés es la tasa real.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Gradiente geométrico como una ecuación en diferencias

Al final del periodo t, el saldo es igual al saldo del inicio del periodo aumentado por el interés y el pago del periodo.

$$P_{t+1} = P_t + RP_t + a(1+g)^t$$

Al reordenar los términos obtenemos una ecuación en diferencias lineal, del primer orden y con el término variable.

$$P_{t+1} - (1+R)P_t = a(1+g)^t$$

La solución complementaria de esta ecuación es $P_c = C(1+R)^t$, donde C es una constante arbitraria.

Para obtener la solución particular ensayamos la solución $P_t = A(1+g)^t$, donde A es el coeficiente por determinar.

$$P_{t+1} = A(1+g)^{t+1} = A(1+g)(1+g)^t$$

Al sustituir estos valores en la ecuación en diferencias, tenemos:

$$A(1+g)(1+g)^t - (1+R)A(1+g)^t = a(1+g)^t$$

Al cancelar el factor común y despejando A, obtenemos: $A = \dfrac{a}{g-R}$

Ahora disponemos de los elementos para escribir la solución general:

$$P_t = C(1+R)^t + \frac{a}{g-R}(1+g)^t$$

Cuando $t = 0$, $C = P_0 - \dfrac{a}{g-R}$

Así, la solución definida es $P_t = \left(P_0 - \dfrac{a}{g-R}\right)(1+R)^t + \dfrac{a}{g-R}(1+g)^t$, o

$$P_t = P_0(1+R)^t + \frac{a}{g-R}\left[(1+g)^t - (1+R)^t\right]$$

Si el saldo inicial es igual a cero, $P_0 = 0$, la solución adquiere la forma:

$$P_t = \frac{a}{g-R}\left[(1+g)^t - (1+R)^t\right]$$

Obviamente es la misma solución que la que obtuvimos al sumar las series. (Para simplificar la notación utilizamos como el primer pago a, en vez de a_1.)

EJEMPLO 3

¿Cuánto acumulará en una cuenta que rinde 25%, si hace 10 pagos crecientes a un ritmo anual de 20%, empezando con el primer pago de $20000?

$$a_1 = 20000, \quad n = 10, \quad R = 25\%, \quad g = 20\%$$

Solución:

$$VFA = \frac{20\,000}{0.25 - 0.2}\left[1.25^{10} - 1.2^{10}\right] = 1\,248\,595.73$$

Respuesta: El valor futuro de los 10 pagos crecientes es $1 248 595.73.

En 10 años 1 248 595.73 parece hoy mucho dinero. Sin embargo, para poner esta cantidad en perspectiva tenemos que recordar que la tasa nominal de 25% refleja una alta inflación. Para mantener constante el poder adquisitivo de nuestra aportación tenemos que aumentar el pago anual en 20% cada año, esto quiere decir que la inflación anual es de 20%. Si la inflación es de 20%, el valor a precios del fin del primer periodo es:

$$\frac{1\,248\,595.73}{1.2^{9}} = 241\,986.22$$

Observación: Utilizamos 9 como el número de periodos, porque el primer pago se efectúa al final del primero, esto es, nueve periodos antes de que se produzca el valor final.

El ejemplo 3 es equivalente a calcular el valor futuro de 10 pagos de $20 000 de poder adquisitivo constante (a precios del momento del primer pago), utilizando la tasa de interés real. Si la tasa nominal es de 25% y la inflación es de 20%, la tasa real es de 4.17% (1.25/1.2 – 1). Si utilizamos esta tasa para calcular el valor futuro de una anualidad de 10 pagos de $20 000 cada uno, obtenemos el resultado de $241 986.22. Es un resultado idéntico al obtenido con la fórmula del valor futuro de anualidad con pagos crecientes, deflactada al final del periodo 1 con la tasa de crecimiento de los pagos.

Secuencia en la calculadora financiera:

1 P.AÑ, MODO FINAL, CLEAR DATA

N	%IA	VA	PAGO	VF
10	4.1667	0	– 20 000	?

Al pulsar $\boxed{\text{VA}}$, obtenemos la respuesta: 241 936.22.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Una empresa necesita reunir 150 000 dólares en cinco años. Planea hacer cinco depósitos al final de cada año, de manera que cada uno será 10% mayor que el anterior. ¿Cuál será el primer depósito, si la tasa de interés es de 5% anual?

Respuesta: 22 439.74 dólares.

RENTA PERPETUA

La *renta perpetua*, también conocida con el nombre de *perpetuidad*, es una anualidad que continúa para siempre. En consecuencia, el valor futuro de una perpetuidad es infinito.

El valor presente de una perpetuidad se puede calcular evaluando el límite en la fórmula del valor presente de una anualidad.

$$VPA_{R,n} = \frac{a}{R}\left[1 - \frac{1}{(1+R)^n}\right]$$

En esta fórmula evaluamos el límite de la expresión entre corchetes, cuando n se vuelve infinitamente grande: $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(1+R)^n} = 0$$

El *valor presente de una perpetuidad* (VPA_R) es el límite del valor presente de una anualidad en la cual el número de pagos es muy grande: $n \to \infty$

$$\boxed{VPA_{R,\infty} = \frac{a}{R}}$$

La fórmula del valor presente de la perpetuidad es muy útil por su simplicidad. Su significado intuitivo es fácil de entender. Supongamos que tenemos \$100 depositados en una cuenta que rinde 10% anual. Cada año retiramos \$10 de interés que gana la cuenta sin tocar el capital. Si el banco no quiebra y si la tasa de interés no cambia, esta situación puede continuar para siempre: \$10 es la renta perpetua y \$100 es el valor presente de esta renta: $\frac{10}{0.1} = 100$. La renta es perpetua porque sólo se retiran los intereses ganados y el capital permanece intacto.[2]

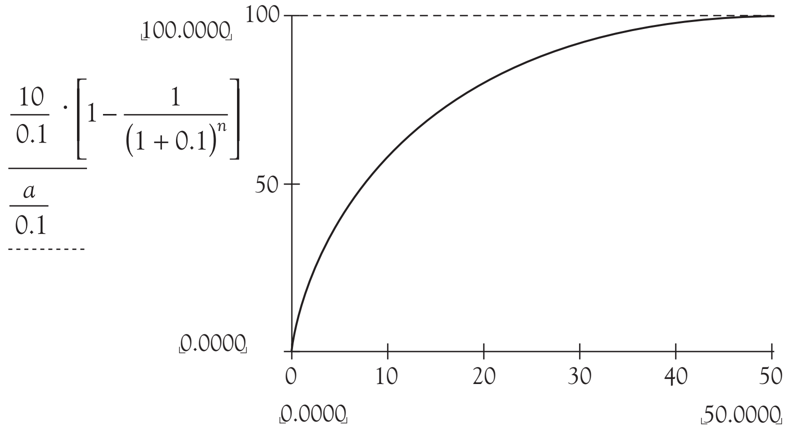
Renta perpetua = principal × tasa de interés.

Aun cuando "perpetuo" parece mucho más largo que, por ejemplo, 50 años, la diferencia entre el valor presente de una anualidad de 50 años y una perpetuidad no es significativa. Si la tasa de interés es de 10%, el valor presente de la perpetuidad de \$10 anuales es de \$100, mientras que el valor presente de la anualidad de 50 años es de \$99.15. Esto se debe a que el valor de la diferencia entre una anualidad y una perpetuidad para 50 años es muy bajo: $\frac{1}{1.1^{50}} = 0.0085$.

[2] Un bono que ofrece un pago anual fijo para siempre se llama *Consol*.

Figura 7.1.

Cuando el plazo crece, el valor presente de una anualidad converge hacia el valor presente de la renta perpetua.



E J E M P L O 1

Un banco le ofrece una perpetuidad de 2000 Udis quincenales. ¿Cuánto puede pagar por ella, si:

a) la tasa de interés es de 6%, compuesta quincenalmente?

b) la tasa de interés es de 4%, compuesta quincenalmente?.

Solución:

a) $R = 0.06/24 = 0.0025$, el valor presente de la perpetuidad es:

$$VP_{0.0025,\infty} = \frac{a}{R} = \frac{2\,000}{0.0025} = 800\,000$$

b) $R = 0.04/24 = 0.00167$, el valor presente de la perpetuidad es:

$$VP_{0.00167,\infty} = \frac{a}{R} = \frac{2\,000}{0.00167} = 1\,200\,000$$

Respuesta:

a) Una perpetuidad de 2000 Udis quincenales a 6% compuesto quincenalmente vale 800000 Udis.

b) La misma perpetuidad a 4% compuesto quincenalmente vale 1200 000 Udis.

Observación:

1) El valor presente de una perpetuidad es muy sensible a la magnitud del factor descuento (la tasa de interés). El valor presente de la perpetuidad a 4% es 50% mayor que el valor presente de la perpetuidad a 6%.

2) La diferencia entre el valor presente de la perpetuidad a 6% y el valor presente de una anualidad de 20 años también a 6% (558 683) es solamente de 30.15%.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Renta perpetua *versus* renta vitalicia

Aunque suenan casi igual, los conceptos *renta perpetua* (perpetuidad) y *renta vitalicia*, son muy distintos. La diferencia salta a la vista si consideramos lo que pasa después de la muerte del beneficiario.

La renta perpetua es como tener un capital en el banco y sólo retirar los intereses en forma periódica. Al morir el dueño, sus herederos tienen derecho a los pagos periódicos (los intereses) o pueden retirar el capital (el valor presente de la perpetuidad).

En el caso de renta vitalicia que venden algunas aseguradoras, el beneficiario tiene asegurada una renta periódica mientras viva. Al morir el beneficiario sus dependientes sobrevivientes tienen derecho a una parte proporcional de la misma: la esposa hasta su muerte y los hijos hasta la mayoría de edad.

Cuando la frecuencia de capitalización es mayor que la frecuencia de pagos, para calcular el valor presente de la renta perpetua es necesario utilizar la tasa efectiva.

EJEMPLO 2

Un ex alumno hace una donación de \$500 000, cada semestre, a su *alma mater.* ¿Cuál es el valor presente de su donación, si la tasa de 23.79% se capitaliza cada mes?

Solución: \$500 000 es el interés semestral de una cantidad que tenemos que calcular. Dado que la tasa de 23.79% es capitalizada mensualmente, podemos despejar el valor presente de la perpetuidad de la siguiente ecuación:

$$VPA \cdot \left[\left(1+\frac{0.2379}{12}\right)^{6}-1\right]=500\,000, \text{ de donde } VPA = 4\,000\,000.$$

La expresión entre corchetes es la tasa efectiva semestral, si la tasa nominal de 23.79% se compone mensualmente.

Respuesta: El ex alumno donó \$4 000 000.[3]

Para resolver este problema con la calculadora financiera, buscamos la tasa semestral efectiva, si la tasa nominal de 23.79% es capitalizada mensualmente. Primero calculamos la tasa nominal semestral, que es exactamente la mitad de la tasa anual: 23.79/2 = 11.895. Ahora ya podemos utilizar el módulo CNVI de la calculadora financiera. La secuencia de pasos es la siguiente:

FIN, CNVI, PER, %NOM = 11.895, P = 6. Al pulsar %EFE tenemos: 12.5.

[3] Este resultado es un poco redondeado. Para que la respuesta sea \$4 millones cerrados, la tasa nominal tiene que ser 23.7893%.

La tasa efectiva semestral es 12.5%, la cual produce la donación del ex alumno. Ahora utilizamos esta tasa para calcular el valor presente de la anualidad.

$$VPA = \frac{500\,000}{0.125} = 4\,000\,000$$

Valor de la renta perpetua, cuando los pagos se efectúan cada cierto número de años

Una metodología similar a la del problema 2 es útil cuando la capitalización es anual, pero los pagos se realizan cada cierto número de años. En este caso se calcula la tasa de interés efectiva entre un pago y otro. Al dividir el valor del pago entre esta tasa se obtiene el valor presente de la perpetuidad.

Si los pagos son cada cinco años, por ejemplo, y la tasa anual (capitalizada anualmente) es de 10%, la tasa efectiva para el quinquenio es:

$$R_{5\text{ años}} = (1.1)^5 - 1 = 0.6105 = 61.05\%$$

EJEMPLO 3

Un municipio construyó un puente de madera por $1 200 000. Este puente tiene que ser reemplazado cada 10 años. ¿Cuál es el valor de un fondo requerido para financiar los reemplazos futuros del puente, si la tasa de interés es de 8%?

Solución: $1 200 000 es el interés que debe ganar el fondo durante 10 años. Es posible despejar el valor presente del fondo de la siguiente ecuación:

$$VP(\text{Fondo})\left[(1.08)^{10} - 1\right] = 1\,200\,000, \text{ de donde } VP(\text{fondo}) = 1\,035\,442.33.$$

Respuesta: Si el municipio establece un fideicomiso por $1 035 442.33, los intereses generados por este fideicomiso serán suficientes para reemplazar el puente cada 10 años.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Valor presente de anualidad como una diferencia entre dos perpetuidades

El valor presente de una anualidad puede ser visualizado como la diferencia entre el valor presente de la perpetuidad en el año cero, $\frac{a}{R}$, y el valor presente de la perpetuidad en el año n, $\frac{a/R}{(1+R)^n}$.

$$\text{Así, } VPA = \frac{a}{R} - \frac{a/R}{(1+R)^n} = \frac{a}{R} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+R)^n}\right)$$

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Un filántropo establece una beca de 12 000 Udis semestrales que la fundación ofrecerá a perpetuidad a algún alumno meritorio. ¿Cuánto cuesta el establecimiento de un fideicomiso que pagará la beca, si la tasa de interés de 6% se capitaliza cada mes?

Respuesta: 395 029.1 Udis.

COSTO CAPITALIZADO Y FLUJO ANUAL EQUIVALENTE

El concepto de la renta perpetua tiene importantes aplicaciones en la valuación de activos y en comparación de proyectos con vidas diferentes. La noción clave en esta metodología es *capitalización*, que en este contexto significa el valor presente de las rentas perpetuas generadas por un negocio, o el valor presente de los costos a sufragar en forma indefinida.

Algunos ejemplos:
El valor capitalizado de la renta perpetua de $1 000 anuales, si la tasa de interés es de 10%, es de $10 000. El valor capitalizado de los costos de reemplazo de un puente de madera cada 10 años, si el puente cuesta $1 200 000 y la tasa de interés es de 8% anual, es de $1 035 442.33.

El *costo capitalizado* de un activo que tiene que ser reemplazado cada cierto número de periodos es la suma de su costo inicial y el valor capitalizado de sus renovaciones futuras.

El *valor presente de reemplazos futuros* es un fondo que, durante la vida del activo, genera intereses suficientes para reemplazarlo.

Costo capitalizado = valor inicial + valor presente de los reemplazos.

Así, el costo capitalizado del puente de madera del ejemplo 3 es la suma de su costo y el valor capitalizado de su reemplazo a perpetuidad.

Costo capitalizado del puente = 1 200 000 + 1 035 442.33 = $2 235 442.33.

Con esta cantidad no sólo es posible construir el puente, sino también reemplazarlo cada vez que se desgaste.

El concepto del costo capitalizado es útil para comparar dos proyectos mutuamente excluyentes que ofrecen el mismo servicio, pero que tienen diferentes costos iniciales y diferentes vidas útiles.

EJEMPLO 1

Continuamos el ejemplo 3 de la sección anterior. Una constructora, al enterarse del proyecto de un puente de madera, propuso una alternativa: un puente de concreto que cuesta $1.8 millones pero que dura 25 años. ¿Qué puente debe construir el municipio, si la tasa de interés es de 8%?

Solución: Es necesario comparar los costos capitalizados de los dos proyectos. Ya sabemos que el costo capitalizado del puente de madera es de $2 235 442.33. El costo capitalizado del puente de concreto es la suma de su costo inicial y el valor presente de los costos de sus reemplazos futuros.

$$VP\left(\text{Costos de reemplazo}\right) = \frac{1\,800\,000}{\left(1.08^{25}\ -1\right)} = 307\,772.53$$

Los costos capitalizados del puente de concreto son:

$$1\,800\,000 + 307\,772.53 = \$2\,107\,772.52$$

Respuesta: A largo plazo resulta más barato el puente de concreto.

EJEMPLO 2

Un camión de carga cuesta \$500 000 y tiene una vida útil de seis años. El costo de capital de la empresa es de 12%. ¿Cuánto puede pagar la empresa por un camión con semejantes características, pero con una vida útil de 10 años?

Solución: En este tipo de problema es necesario encontrar el precio del camión de mejor calidad que tenga los mismos costos capitalizados que el camión más barato. Si designamos el precio del segundo camión como *x*, podemos despejar su valor de la siguiente ecuación:

$$500\,000 + \frac{500\,000}{1.12^{6} - 1} = x + \frac{x}{1.12^{10} - 1}$$

El costo capitalizado del camión más barato es de \$1 013 440.49. El precio del camión más durable que tenga el mismo costo capitalizado es $x = 687\ 139\ 78$.

Respuesta: La empresa puede pagar por el camión más duradero hasta \$687 139.78. Si paga menos, a largo plazo el camión más caro resultará más barato.

Un método alternativo de resolver el problema 2 es utilizar el costo anual equivalente, el *SNU*.

Si el costo de \$500 000 hay que sufragarlo cada seis años, el costo anual es el pago periódico de una anualidad que dura seis años y cuyo valor presente es 500 000. Si la tasa de interés es de 12%, este pago (*SNU*) se puede despejar de la fórmula del valor presente de la anualidad.

$$500\,000 = \frac{SNU}{0.12}\left[1 - \frac{1}{1.12^{6}}\right], \text{ de donde } SNU = 121\,612.86.$$

Ahora calculamos el valor presente de una anualidad que tiene el mismo pago periódico, pero que dura 10 años.

$$VPA = \frac{121\,612.86}{0.12}\left[1 - \frac{1}{1.12^{10}}\right] = 687\,139.78$$

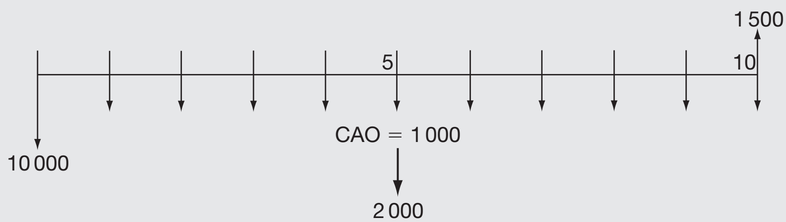
Si el camión que dura 10 años cuesta menos de $687 139.78, su costo anual será menor que el costo del camión con vida de seis años.

Con frecuencia un ingeniero confronta la necesidad de comparar máquinas que desempeñan la misma función pero tienen diferente costo inicial, diferentes vidas y diferentes costos de operación y rescate. La comparación directa es imposible porque hay demasiados parámetros. Al calcular el *costo anual equivalente* (*SNU*) el ingeniero reduce el número de parámetros a uno solo, lo que le facilita enormemente la selección.

EJEMPLO 3

Una máquina cuesta $10 000 y tiene una vida útil de 10 años. El costo anual de operación (CAO) es de $1 000 y en el quinto año la máquina requiere un mantenimiento cuyo costo esperado es de $2 0000. El valor de rescate es de $1 500. Calcule el costo anual equivalente de la máquina, si el costo de capital de la empresa es de 15%.

Solución: Para resolver este problema, primero dibujamos la línea de tiempo para visualizar correctamente los flujos de efectivo. Aquí todos los flujos, menos el valor de rescate, son negativos.



Un método para resolver el problema con flujos irregulares es llevar todos los flujos al presente:

$$VP(1\,500) = \frac{1\,500}{1.15^{10}} = 370.78$$

Valor presente del rescate que hay que restar del costo inicial.

$$VPA(15\%, 10\,000) = \frac{1\,000}{0.15}\left(1 - \frac{1}{1.15^{10}}\right) = 5\,018.77$$

Valor presente de los costos anuales de operación.

$$VP(2\,000) = \frac{2\,000}{1.15^{5}} = 994.35$$

Valor presente del costo de mantenimiento.

Ahora ya podemos calcular el valor presente de todos los costos de la máquina:

$$VP(\text{costo}) = 10\,000 - 370.78 + 5\,018.77 + 994.35 = 15\,642.34$$

Al sustituir este valor en la fórmula del valor presente de la anualidad despejamos el costo anual equivalente.

$$15\,642.34 = \frac{SNU}{0.15}\left(1 - \frac{1}{1.15^{10}}\right) \Rightarrow SNU = 3\,116.77$$

Respuesta: El costo anual equivalente de la máquina es de $3 116.77. Este costo puede ser comparado con los costos anuales de otras alternativas.

Otro método para resolver el problema 3 consiste en observar que el costo anual de operación (1 000) ya está en escala anual. Lo único que hace falta es traducir al costo anual los flujos irregulares y sumarlos al CAO.

El costo inicial más el valor presente del costo de mantenimiento menos el valor presente del rescate es:

$$10000 + 994.35 - 370.78 = 10623.57$$

El flujo anual equivalente a este valor es:

$$10623.57 = \frac{SNU}{0.15}\left(1 - \frac{1}{1.15^{10}}\right) \Rightarrow SNU = 2116.77$$

Al sumar el costo anual equivalente del costo inicial y de los flujos irregulares al costo anual de mantenimiento obtenemos el costo anual equivalente de la máquina.

$$2116.77 + 1000 = 3166.77.$$

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Los postes de madera que usa la empresa de teléfonos cuestan $1 000 cada uno y duran cinco años. Una empresa de impregnación propone un tratamiento que prolongaría la vida de los postes en cuatro años. ¿Cuánto, como máximo, puede pagar la empresa de teléfonos por el tratamiento, si su costo de capital es de 14%?

Respuesta: $440.8 por cada poste.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Equivalencia entre el costo capitalizado y la SNU

Si dividimos la SNU del problema 2 entre la tasa de interés, obtenemos el costo capitalizado $\frac{121612.86}{0.12} = 1013440.5$; esto no es ninguna coincidencia. Si la SNU es el costo anual, al dividirlo entre la tasa de interés obtenemos el valor presente de la renta anual perpetua (igual a la SNU). El valor presente de la SNU a perpetuidad es el costo capitalizado. Despejamos la SNU de la fórmula del valor presente de la anualidad.

$$SNU = \frac{VP \cdot R}{1 - \frac{1}{(1+R)^n}} = \frac{(1+R)^n \cdot VP \cdot R}{(1+R)^n - 1}$$, donde VP es el costo inicial.

Dividimos ambos lados entre R y tomando en cuenta que: $\dfrac{(1+R)^n}{(1+R)^n - 1} = 1 + \dfrac{1}{(1+R)^n - 1}$,

tenemos: $\dfrac{SNU}{R} = VP\dfrac{(1+R)^n}{(1+R)^n - 1} = VP + \dfrac{VP}{(1+R)^n - 1} =$ costo capitalizado

Esto demuestra que el costo capitalizado es el valor presente de la renta anual perpetua igual a la *SNU*.

$$\text{Costo capitalizado} = \frac{SNU}{R}$$

Al observar con detenimiento la fórmula: $\dfrac{SNU}{R} = \dfrac{VP \cdot (1+R)^n}{(1+R)^n - 1}$, podemos constatar que mientras que el lado izquierdo es el flujo anual dividido entre la tasa de interés anual, el lado derecho es el flujo del periodo de n años dividido entre la tasa (efectiva) del periodo de n años. El lado izquierdo es el costo capitalizado (valor presente de la renta perpetua) calculado con base en un flujo anual y el lado derecho es el mismo costo capitalizado calculado con base en el periodo de n años.

RENTA PERPETUA CON PAGOS CRECIENTES A UN RITMO CONSTANTE

Para obtener la fórmula de una perpetuidad en la cual se espera que el pago periódico va a crecer a una tasa g, tomamos como punto de partida la fórmula del valor presente de la anualidad con pagos crecientes.

$$VPA = \frac{a_1}{R-g}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^n\right]$$

Si la tasa de interés es mayor que la tasa de crecimiento de los pagos, la expresión entre paréntesis tiende a cero, cuando n se vuelve muy grande.

$$\text{Si } R > g \;\Rightarrow\; \frac{1+g}{1+R} < 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+g}{1+R}\right)^n = 0$$

Si la expresión entre paréntesis se anula con el tiempo, la anualidad de pagos crecientes se convierte en una perpetuidad, cuyo valor presente es:

$$\boxed{VPA_{R,\infty} = \frac{a_1}{R-g}}$$

donde $a_1 = a_0(1+g)$ es el valor del primer pago.

Si a representa una renta cuyo monto nominal crece junto con la inflación (i), entonces el valor de la perpetuidad es el valor de la siguiente renta dividido entre la *tasa de interés real* (r).

$$VPA_{r,\infty} = \frac{a}{r} \qquad \text{donde} \qquad r = \frac{R - i}{1 + i}$$

Tanto el pago a como el valor presente de la renta perpetua están a precios del fin del periodo. Si lo que deseamos es el valor de la renta perpetua a precios del periodo cero, necesitamos dividir a entre $(1 + i)$.

$$VPA_{r,\infty} = \frac{a}{r(1+i)} \qquad \text{(a precios del periodo cero)}$$

Si el flujo de efectivo (la renta) decrece a una tasa g, la fórmula de la perpetuidad adquiere la siguiente forma:

$$VPA_{R,\infty} = \frac{a}{R + g}$$

En un entorno inflacionario esta fórmula tiene pocas aplicaciones.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Cuando la tasa de crecimiento de los pagos es mayor que la tasa de interés, el valor presente de la anualidad crece con el número de pagos y el valor presente de la renta perpetua sería infinito.

$$\text{Si } R < g \quad \Rightarrow \quad \frac{1+g}{1+R} > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^n = \infty$$

No existe ninguna cantidad que permita liquidar pagos crecientes a perpetuidad, si la tasa de crecimiento de estos pagos fuese mayor que la tasa de interés.

EJEMPLO 1

¿Cuál es el valor presente de una renta perpetua de 120 000 Udis anuales que crece 5% anual, si la tasa de interés es de 7%?

$$a_1 = 120\,000, \qquad R = 7\%, \qquad g = 5\%$$

Solución: Sustituimos los datos del problema en la fórmula de la perpetuidad de pagos crecientes:

$$VPA_{R,\infty} = \frac{a_1}{R - g} = \frac{120\,000}{0.07 - 0.05} = 6\,000\,000$$

Respuesta: Para recibir una renta anual perpetua de 120 000 Udis, que crece 5% cada año, es necesario establecer un fondo de 6 millones de Udis.

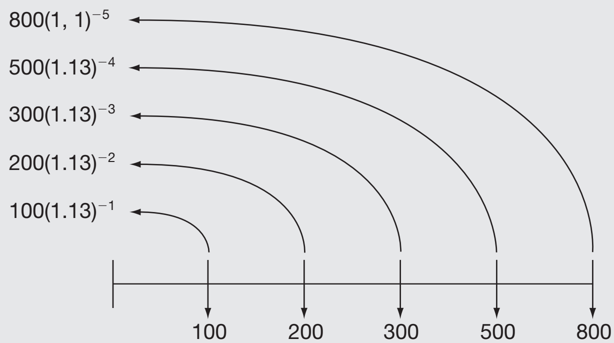
PAGOS DESIGUALES

Cuando los pagos periódicos no son iguales, las fórmulas generales para las anualidades no se aplican. En estos casos, para obtener el valor presente (o futuro) de una serie de flujos, es necesario usar la calculadora financiera o una hoja de cálculo. En el siguiente ejemplo utilizamos el diagrama de flujo de efectivo para visualizar el problema.

EJEMPLO 1

Una empresa contempla un proyecto de inversión que promete los siguientes flujos de efectivo netos durante cinco años (al final de cada año): 100, 200, 300, 500, 800. ¿Cuál es el valor presente de este flujo de efectivo, si la tasa de descuento que refleja el costo de oportunidad de capital para la empresa es de 10%?

Solución: El diagrama de tiempo y valor tiene la siguiente forma:



Al sumar los valores presentes de los cinco flujos, obtenemos:

$$VPA = \frac{100}{1.1} + \frac{200}{1.1^2} + \frac{300}{1.1^3} + \frac{500}{1.1^4} + \frac{800}{1.1^5} = 1\,319.84$$

En el contexto de evaluación de proyectos de inversión, la suma de los valores presentes de los flujos de efectivo netos producidos por el proyecto se llama valor presente bruto (*VPB*) del proyecto.

$$VPB = \frac{FE_1}{(1+k)^1} + \frac{FE_2}{(1+k)^2} + \cdots + \frac{FE_n}{(1+k)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{FE_t}{(1+k)^t}$$

donde FE_t es el flujo de efectivo neto que se produce al final del periodo t,

k es el costo de capital de la empresa,

n es la vida del proyecto en años.

Si del valor presente bruto del proyecto restamos el costo del mismo (I_0), obtenemos el valor presente neto (*VPN*)

$$VPN = VPB - I_0$$

Si el costo del proyecto del ejemplo 3 fuera $1 000, el valor presente neto sería $319.84. Si el *VPN* > 0, el proyecto debe ser aceptado.

Respuesta: El valor presente de los flujos de efectivo generados por el proyecto propuesto es de $1 319.84. Dado que el costo del proyecto es menor que esta cantidad, el valor presente neto es positivo y el proyecto puede ser aprobado.

En términos simbólicos, el valor presente de una anualidad de flujos desiguales es:

$$\boxed{VPA_{a_t,R,n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{(1+R)^t}}$$

donde a_t es el pago (entrada neta de efectivo) en el periodo t.

Para resolver el ejemplo 3 en la calculadora financiera utilizamos el submenú F.CAJ del menú FIN. Al apretar la tecla FIN, en la pantalla aparece F.CAJA(5) = ? Esto significa que en nuestro último cálculo teníamos un problema con cuatro flujos de efectivo. Para poner ceros en todos los registros pulsamos CLEAR DATA. La calculadora pregunta: ¿Borro la lista? Contestamos: SÍ. Ahora en la pantalla aparece: F.CAJ(0) = ? A continuación presentamos la secuencia de pasos junto con comentarios:

Teclas	Pantalla	Descripción
0 INPUT	F.CAJ(1) = ?	No se conoce el costo del proyecto.
100 INPUT	NO.DE VECES(1) = 1	La calculadora sugiere que el flujo 1 igual al 100 se produce una vez.
INPUT	F. CAJ(2) = ?	La calculadora pregunta por el flujo de caja 2.
200 INPUT, INPUT	NO. DE VECES(2) = 1	Lo mismo que en el punto 2.
300 INPUT, INPUT	NO. DE VECES(3) = 1	
500 INPUT, INPUT	NO. DE VECES(4) = 1	
800 INPUT, INPUT	F. CAJ(6) = ?	Ya terminó la entrada de los flujos.
EXIT		

En la pantalla aparecen los siguientes registros:

TOTAL	%TIR	I%	VAN	SNU	VFN

TOTAL es la suma de todos los flujos de efectivo sin descontar.
%TIR es la tasa interna de retorno.
I% es la tasa de descuento que representa el costo de capital.

VAN	es el valor presente neto (valor actual neto).
SNU	es la serie neta uniforme (pago anual equivalente).
VFN	valor futuro neto.

Para calcular el valor presente del flujo de efectivo introducimos 10% en el registro I% y pulsamos la tecla VAN. La pantalla dice: VAN = 1 319.8366.

Al pulsar la tecla SNU obtenemos: SNU = 348.17. Esto significa que, si la tasa de interés es de 10%, los flujos de efectivo del proyecto son equivalentes a una anualidad de cinco pagos de 348.17 cada uno.

La respuesta al ejemplo 1 representa en realidad el valor presente bruto (*VPB*). Para obtener el valor presente neto (*VPN*) necesitamos restar del *VPB* el costo inicial de la inversión (I_0). Si el costo de la inversión es de $1 000:

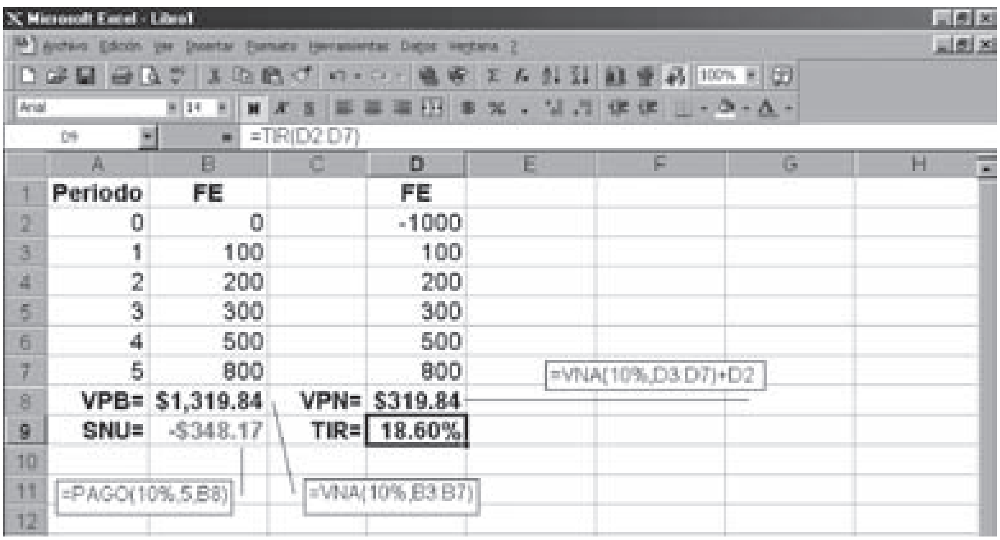
$$VPN = VPB - I_0 = 1\,319.84 - 1\,000 = 319.84$$

Para obtener este resultado en la calculadora, tenemos que introducir el costo de la inversión en el F.CAJ(0). Pulsamos la tecla EXIT y regresamos hasta el flujo de caja cero. Para esto pulsamos la tecla $\boxed{\blacktriangle}$ (la flecha hacia arriba) 11 veces, hasta que en la pantalla aparece: F.CAJ(0) = ?, o pulsamos la tecla dorada seguida por la flecha hacia arriba. Introducimos 1 000 en la pantalla, pulsamos $\boxed{+/-}$, INPUT, EXIT, CALC. Ahora, al pulsar VAN, obtenemos la respuesta: 319.84.

Si pulsamos la tecla %TIR, obtenemos la tasa interna de retorno: %TIR = 18.59%. La tasa interna de retorno es la tasa de descuento que iguala el valor presente de los flujos de efectivo generados por el proyecto con el costo presente del mismo.

SNU = 84.37 significa que le valor presente del proyecto es equivalente a una anualidad de cinco pagos de $84.37 cada uno.

Para efectuar estos cálculos en Excel, utilizamos las funciones: VNA, TIR y PAGO. La siguiente pantalla explica el procedimiento.



Valor futuro de una serie de pagos desiguales

Para calcular el valor futuro de una serie de pagos desiguales tenemos que llevar cada pago al futuro y sumarlos. En el caso del ejemplo 1, el valor futuro de la serie de los flujos de efectivo del proyecto es:

$$VFA = 100(1.1)^4 + 200(1.1)^3 + 300(1.1)^2 + 500(1.1)^1 + 800 = 2\,125.61$$

En términos simbólicos, el valor futuro de una anualidad de flujos desiguales es:

$$VFA_{a_t,R,n} = \sum_{t=1}^{n} a_t (1+R)^{n-t}$$

Para calcular el valor futuro de una serie de pagos desiguales en el módulo F.CAJ de la calculadora financiera, es necesario pulsar la tecla VFN. Hablaremos con mayor detalle de estos conceptos en la parte del libro dedicada a los métodos de evaluación de proyectos.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Hace ocho años un señor abrió una cuenta que paga 11% compuesto semestralmente con un depósito de $10 000. Dos años después efectuó otro depósito de $20 000 y tres años más tarde hizo el último depósito de $40 000. Dibuje el diagrama de flujo de efectivo y calcule cuánto dinero tiene su cuenta ahora.

Respuesta: $116 730.49.

FÓRMULAS DEL CAPÍTULO

Valor presente	Valor futuro
Gradiente aritmético $VP(G) = \frac{G}{R}\left[\frac{(1+R)^n - 1}{R(1+R)^n} - \frac{n}{(1+R)^n}\right]$	Gradiente aritmético $VF(G) = \frac{G}{R}\left[\frac{(1+R)^n - 1}{R} - n\right]$
Gradiente geométrico $VPA = \frac{a_1}{R-g}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^n\right]$	Gradiente geométrico $VFA = \frac{a_1}{R-g}\left[(1+R)^n - (1+g)^n\right]$
Pago anual uniforme equivalente al gradiente aritmético $a(G) = G\cdot\left[\frac{1}{R} - \frac{n}{(1+R)^n - 1}\right]$	Valor presente bruto $VPB = \sum_{t=1}^{n} \frac{FE_t}{(1+k)^t}$

Valor terminal bruto	Renta perpetua
$VTB = \sum_{t=1}^{n} FE_t (1+R)^{n-t}$	$VPA_{R,\infty} = \frac{a}{R}$
Renta perpetua con pagos crecientes $VPA_{R,\infty} = \frac{a_1}{R-g}$	

Términos clave

Costo anual equivalente
Costos capitalizados
Gradiente aritmético
Gradiente geométrico
Pago base
Renta perpetua (perpetuidad)
Renta vitalicia
Serie en escalera
Serie uniforme equivalente
Tasa interna de retorno
Valor presente bruto

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. ¿Cuánto reuniré en mi cuenta en dos años, si mi primera aportación al final de este mes será de $1 000 y me propongo aumentarla $150 cada mes? Mi cuenta rinde 12% anual. ¿Cuál será el monto de mi último pago?
2. Para saldar su deuda una empresa debe hacer 20 pagos mensuales. El primer pago es de $10 000 y cada pago subsiguiente es $1 000 mayor que el anterior. ¿Cuál fue la cantidad solicitada en préstamo, si la tasa de interés es de 15%?
3. ¿Cuál debe ser mi primer ahorro mensual si me propongo ahorrar $40 000 en nueve meses y cada una de mis aportaciones será $400 mayor que la anterior? La tasa de interés es de 21%.
4. Un préstamo por $120 000 tiene que ser desembolsado mediante 18 pagos mensuales, cada uno de los cuales es $500 mayor que el anterior. La tasa de interés es de 18%. Calcule:
   a) el primer pago
   b) el último pago
   c) la suma de todos los pagos
5. Si tengo un crédito de $200 000 y mi primer pago mensual es de $2 460.2, ¿cuánto debo aumentar cada pago subsiguiente (gradiente aritmético) para poder terminar de pagar la deuda en 36 meses? La tasa de interés es de 18%.
6. La empresa Escudo debe reunir la cantidad de $500 000 mediante 15 aportaciones mensuales que crecerán en una cantidad fija. La primera aportación es de $14 802.97. La tasa de interés es de 30%. ¿Cuál debe ser el incremento mensual de la aportación de la empresa para poder cumplir con el objetivo?

7. Para financiar un proyecto de expansión en cinco años la empresa Progreso planea hacer depósitos anuales a un fondo especial que genera un rendimiento de 21%. El primer depósito (al final del primer año) es de $200 000 y cada depósito subsiguiente será 15% mayor que el anterior. ¿Cuánto dinero reunirá la empresa en el fondo al final del quinto año?
8. ¿Cuál es el valor presente de 20 aportaciones mensuales que crecen a un ritmo de 5%, si la primera aportación es de $5 000 y la tasa de interés es de 24%? ¿Cuál será el valor de la última aportación?
9. Este año la empresa Salud y Fuerza obtendrá utilidades netas de $1 000 000. Se espera que las utilidades van a crecer a un ritmo de 17% anual. Calcule el valor presente de las utilidades de los próximos 10 años, si la tasa de interés es de 20%.
10. Un crédito de $250 000 debe pagarse en 30 mensualidades, donde cada una debe ser 2.5% mayor que la anterior. ¿Cuál debe ser el primer pago, si la tasa de interés es de 24%?
11. Desea reunir una cantidad de $300 000 mediante 36 pagos mensuales, cada uno de los cuales será 2% mayor que el anterior. Calcule el primer pago si la tasa de interés es de 27%.
12. El señor López tiene 10 hectáreas de bosque que producen un ingreso anual neto de $100 000. ¿Cuál es el valor teórico de este terreno, si la tasa de interés real es de 4.5% y el riesgo implícito en la explotación del bosque amerita una prima de riesgo de 7.5%?
13. Calcule el valor presente de una fundación que dedica cada año $4 millones a actividades caritativas, si la tasa de interés a que invierte su patrimonio es de 6% con capitalización mensual.
14. Usted compra un automóvil por $150 000 y planea venderlo en cinco años por $50 000. La tasa de interés es de 5%. (Todos los cálculos en este ejercicio son en términos de pesos constantes.) ¿Cuál es el valor del fondo que necesita establecer hoy para poder reemplazar el automóvil cada cinco años?
15. Un taxista enfrenta la siguiente alternativa: comprar un Tsuru que dura cinco años por $100 000, o un Honda Civic que dura 10 años pero cuesta $200 000. La tasa de interés es de 6%. Se supone que los costos de mantenimiento de las dos unidades son idénticos y el valor de rescate en los dos casos es cero. ¿Qué unidad debe comprar el taxista si pretende minimizar sus costos a largo plazo?

    Observación: El alumno debe resolver este problema tanto con el método del costo capitalizado como con el de serie anual uniforme (*SNU*).
16. Un ex alumno exitoso establece en su *alma mater* una cátedra patrimonial que pagará a perpetuidad a su titular (seleccionado cada cinco años por el senado) un sueldo mensual de $30 000. El sueldo aumentará 15% cada año. ¿Cuál es el valor de la donación del ex alumno, si la tasa de interés es de 20%?
17. Repita el ejercicio anterior en términos de las Udis y la tasa de interés real. El valor de la Udi es $2.5. ¿Por qué el valor del fondo en Udis es mayor que en pesos?
18. Después de la graduación usted se enfrenta con la siguiente alternativa. Le ofrecen un empleo con un sueldo anual de $60 000, o puede comprar un negocio (un restaurante) y dedicarse a la administración del mismo. El dueño del restaurante pide $500 000, pero usted quiere calcular el valor teórico del negocio. De los estados financieros del restaurante se entera de que las ventas anuales promedio a precios corrientes son unos $500 000 y las utilidades netas son de $120 000. El equipo del restaurante tiene el valor de rescate de $100 000. ¿Cuánto puede pagar por el negocio (cuál es su valor), si la tasa de interés real es de 5% y la prima de riesgo en este tipo de actividad es de 20%?
19. Usted estudia un proyecto que promete los siguientes flujos de efectivo netos (a precios de hoy) durante cinco años: 100, 200, 250, 250 y 500.

a) ¿Cuál es el valor presente de este flujo de efectivo, si el costo de capital de su empresa es de 12%?

b) ¿Cuál es el *flujo anual equivalente* (*SNU*) de los flujos mencionados?

c) Si el proyecto cuesta $700, ¿cuál es el valor presente neto y la tasa interna de retorno del proyecto?

20. Se estima que un proyecto de inversión generará los siguientes flujos de efectivo netos durante los cuatro años de su vida: 250, 250, 350 y 300.

a) ¿Cuál es el valor presente de estos flujos de efectivo (*VPB*), si el costo de capital de la empresa es de 14%?

b) Si el costo del proyecto (I_0) es $600, ¿cuál es el valor presente neto del proyecto y la *TIR*?

c) ¿Cuál es el flujo anual equivalente (*SNU*), de los flujos estimados?

d) ¿El proyecto debe ser aceptado o rechazado? ¿Por qué?

CAPÍTULO 8

Valuación

Objetivos del aprendizaje

Después de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

- Explicar los diferentes significados de “valor”.
- Utilizar el concepto de “renta perpetua” en la valuación de los activos.
- Calcular el valor teórico de una casa de renta.
- Distinguir entre el rendimiento requerido y la tasa de capitalización de mercado.
- Analizar los factores que determinan la prima de riesgo de mercado.
- Entender los elementos básicos del modelo CAPM.
- Desarrollar el modelo de dividendos descontados sin y con el crecimiento de los dividendos.
- Aplicar el modelo de dividendos descontados para estimar el costo de capital contable de la empresa.
- Utilizar el modelo de dividendos descontados en términos nominales y en términos reales.
- Relacionar el múltiplo P/E con el rendimiento del capital contable.
- Saber utilizar el múltiplo P/E para estimar el valor teórico de la empresa.
- Entender los factores que determinan el valor del múltiplo P/E.
- Entender la lógica de modelos de valuación basados en otras razones financieras.
- Determinar el valor económico de las oportunidades de crecimiento de la empresa.
- Relacionar la razón P/E con la política de dividendos y el rendimiento esperado de las nuevas inversiones.
- Explicar las circunstancias que justifican altos niveles de P/E.

INTRODUCCIÓN

La valuación es un proceso para calcular cuánto vale un activo. El objetivo es encontrar activos subvaluados para comprarlos y activos sobrevaluados para venderlos. Los criterios de sobrevaluación y subvaluación son una comparación del valor teórico con el precio de mercado. Un activo es subvaluado si su valor es mayor que el precio de mercado y es sobrevaluado si su valor es menor que el precio de mercado. Un concepto crítico en valuación es el *valor fundamental*, también conocido como *valor teórico* o *valor intrínseco*.

El *valor fundamental de un activo* es el precio que los inversionistas racionales, con la misma actitud hacia el riesgo, pagarían por el activo si tuvieran acceso a la misma información.

En términos más generales, el valor de un activo es el costo de un portafolio de activos financieros que produce los mismos flujos de efectivo con el mismo nivel de riesgo que el activo sujeto a valuación. Un portafolio así se llama *portafolio de seguimiento* (*tracking portfolio*).

Hay varios enfoques hacia la valuación. Uno se basa en la *ley del precio único* y la *teoría de arbitraje*. Según este enfoque, los activos semejantes deben tener el mismo precio. Si queremos saber cuánto vale una casa, por ejemplo, buscamos precios de casas con características similares. Cualquier violación de la ley del precio único genera oportunidades de arbitraje. El *arbitraje* es una estrategia que genera utilidades sin riesgo y sin uso de recursos propios. En el uso coloquial, éste consiste en comprar barato y vender caro.

El *arbitraje* consiste en construir un portafolio de cero inversión y cero riesgo que produce un rendimiento positivo.

En el caso de los activos financieros, la ley del precio único sostiene que los activos con las mismas características deben ofrecer el mismo rendimiento en términos de la misma moneda. La competencia entre los inversionistas, los arbitrajistas y los especuladores hace que las diferencias entre los precios de activos semejantes no puedan rebasar los costos de transacción.

Se presenta una oportunidad de arbitraje, si el costo del portafolio de seguimiento (TP) es diferente del precio del activo. Por ejemplo, si el TP cuesta menos que el activo, el arbitraje consiste en vender el activo e invertir el dinero en TP.

Cuando no se puede aplicar la ley del precio único, porque el activo que pretendemos evaluar no tiene un equivalente exacto con precio conocido, es necesario aplicar algún *modelo de valuación*. Como veremos a continuación, la aplicación de cualquier modelo no es un ejercicio mecánico, sino que implica juicios cualitativos. Con frecuencia es necesario utilizar más de un modelo de valuación. Si el resultado de diferentes métodos de valuación es semejante, tenemos más confianza en el momento de tomar decisiones.

¿Cómo está relacionado el precio de mercado con el valor? Los participantes en el mercado utilizan toda la información disponible y todos los métodos de valuación para detectar activos cuyo precio no está en línea con el valor. Si consideran que el activo es subvaluado, lo compran. Si juzgan que el activo es sobrevaluado, lo venden. Dado que para un vendedor en cada transacción tiene que haber un comprador, en equilibrio el precio de mercado es el promedio ponderado de las valuaciones de todos los participantes, teniendo mayor peso aquellos participantes que mueven más dinero y poseen mejor información. Normalmente quienes poseen más dinero también utilizan mejores modelos de valuación.

El precio de mercado es el promedio ponderado de las valuaciones de todos los participantes.

El mercado es eficiente si los precios reflejan toda la información pertinente al valor fundamental de los activos. En un mercado eficiente los precios reflejan de manera fiel el valor, aunque puede haber algunas discrepancias en el corto plazo, dado que los factores que afectan el valor cambian constantemente.

En el presente capítulo estudiaremos modelos basados en los dividendos descontados y modelos basados en las razones financieras. Antes de explicar los aspectos matemáticos de la valuación, mencionaremos diferentes conceptos de valor.

Valor de mercado es el precio del activo en las transacciones más recientes. El precio cambia con gran frecuencia a consecuencia del libre juego entre la oferta y la demanda. El precio se basa en las estimaciones del valor por los participantes. En caso de un activo poco líquido, el precio puede ser no representativo si hay pocos compradores y vendedores, u obsoleto, si no había transacciones recientes.

Valor en libros es la diferencia entre el valor contable de los activos y el valor contable de los pasivos. El valor en libros depende de las reglas de contabilidad, que pueden ser bastante arbitrarias, y puede alejarse mucho del precio de mercado. En el caso de una sociedad anónima, el valor en libros dividido entre el número de acciones en circulación se conoce como el valor en libros por acción (siglas en inglés: BVPS). El precio de mercado muy por debajo del valor en libros puede señalar una empresa subvaluada e indicar un potencial de ganancia de capital.

Valor de liquidación es la cantidad de dinero que se obtendría al liquidar la empresa, vendiendo sus activos y pagando todas sus obligaciones. Es el valor en libros a precios de mercado. El valor de liquidación es el piso por debajo del cual no puede caer el valor de las acciones de una empresa. Si el precio de mercado de acción es menor que el valor de liquidación por acción, la empresa se convierte en un blanco fácil de una adquisición hostil.

Valor de reemplazo (o el costo de replicación) es el costo de establecer una empresa nueva con las mismas características que la existente. Es el valor de mercado de todos los activos de la empresa: activos físicos y activos intangibles. El valor de reemplazo de una casa, por ejemplo, es el costo de construir una casa idéntica. El valor de reemplazo es el techo del valor de mercado de la empresa. Si el valor de mercado es mayor que el valor de reemplazo, la competencia tiene incentivos para replicar la empresa.

$$\text{Valor de liquidación} \leq \text{precio} \leq \text{valor de reemplazo}$$

Valor intrínseco es el valor presente de los flujos de efectivo netos que el activo generará en el futuro. Su cálculo se basa en los flujos de efectivo descontados. Es un método moderno de valuación que utiliza los conceptos de anualidad y renta perpetua.

VALUACIÓN BASADA EN EL CONCEPTO DE RENTA PERPETUA

El concepto de renta perpetua es el fundamento metodológico de los modelos de valuación de activos basados en los flujos de efectivo descontados. Ya en el siglo XIX David Ricardo utilizaba este concepto para calcular el valor de la tierra.

Si un terreno genera una renta anual neta de 1 000 libras esterlinas (£) y si la tasa de interés del mercado es de 5%, el terreno debe costar £20 000.

$$a = £1\,000, \qquad R = 0.05$$

El valor del terreno es igual al valor presente de una perpetuidad que genera un ingreso anual neto de £1 000.

$$V(\text{terreno}) = VPA_{R,\infty} = \frac{a}{R} = \frac{1\,000}{0.05} = 20\,000$$

En condiciones de certidumbre, para el dueño del terreno sería lo mismo rentarlo por £1 000 anuales o venderlo por £20 000, depositar el dinero en el banco y ganar a perpetuidad un interés anual de £1 000.

La tasa de interés que se utiliza en la fórmula de la perpetuidad se llama tasa de capitalización de mercado. Es la tasa real ajustada por el riesgo. Se supone que si hubiera inflación que aumentara la tasa de interés nominal, también aumentaría el valor de la renta en la misma proporción (supuesto de la inflación neutral).

Reflexión sobre matemáticas financieras

En cada periodo, al descontar la renta nominal un periodo hacia atrás, incluimos la inflación tanto en el numerador como en el denominador $(1 + i)$.

$$\frac{a(t)}{1+R} = \frac{a(1+i)}{(1+r)(1+i)} = \frac{}{1}$$

donde
- $a(t)$ es el valor de la renta en función del tiempo,
- a es la renta en términos reales,
- R es la tasa de interés nominal,
- r es la tasa real,
- i es la tasa de la inflación del periodo.

Descontar la renta nominal $a(t)$ con la tasa nominal, R, es lo mismo que descontar la renta real a, con la tasa real r.

Así, el valor de la renta en el numerador de la perpetuidad es el valor en términos reales. La tasa de interés del denominador también debe ser real.

Si la renta que produce un activo no es segura, para obtener la tasa de capitalización de mercado es necesario sumar a la tasa de interés real la prima de riesgo.

$$k = r + \text{prima de riesgo}$$

donde k es la tasa de capitalización de mercado adecuada para calcular el valor presente de una renta perpetua.

EJEMPLO 1

Una casa se renta por $3500 mensuales. De esta cantidad $500 constituyen los costos para el dueño (impuesto predial, mantenimiento, etc.). La tasa real de interés en el mercado de dinero es de 4%. El negocio de rentar casas es bastante riesgoso, por lo que la prima de riesgo adecuada para este caso es de 8%. ¿Cuánto vale la casa?

Solución:

$$\text{Renta anual neta} = 12(3\,500 - 500) = 36\,000$$

$$k = r + \text{prima de riesgo} = 4\% + 8\% = 12\%$$

Como tasa de interés se toma la tasa real más la prima de riesgo, en virtud del supuesto de que la renta de la casa subirá al mismo ritmo que la inflación. Así, eliminamos la inflación tanto del numerador como del denominador.

$$\text{Valor} = \frac{\text{Renta}}{\text{Tasa de interés}} = \frac{36\,000}{0.12} = 300\,000$$

Respuesta: El valor teórico de la casa es de $300 000.

El dueño de la casa no quiere venderla porque considera que se apreciará en el futuro. Concretamente, el dueño piensa que las perspectivas económicas del país son muy buenas y la situación en el mercado de bienes raíces mejorará muy pronto. A continuación mencionaremos algunos acontecimientos que podrían aumentar el valor fundamental de la casa:

1. La inflación a la baja, la apreciación real de la moneda nacional y la reducción del riesgo del país pueden reducir la tasa real de interés a 2%. Sólo estas condiciones aumentarían el valor de la casa a $360 000.
2. La recuperación económica y la creación de puestos ejecutivos bien remunerados en la entidad aumentarán la demanda de las casas en renta, lo cual, aunado al hecho de que en los últimos tres años no había ninguna construcción de casas-habitación, subirá la renta anual neta de su casa a $48 000. Sólo estas condiciones aumentarían el valor de su casa a $400 000.
3. La democratización, la estabilidad política, el avance de las reformas estructurales y la economía en franca expansión pueden reducir la prima de riesgo en negocios como la renta de casas a 6%. Ello aumentaría el valor de la casa a $360 000.

Si todas las expectativas del dueño se cumplen dentro de un año, el nuevo valor de la casa será:

$$\text{Valor} = \frac{\text{Renta}}{\text{Tasa de interés}} = \frac{48\,000}{0.08} = 600\,000$$

Como podemos observar, cuando el mercado de bienes raíces está deprimido y la situación económica mejora, el potencial de ganancia de capital para los dueños de las casas es considerable.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Renta neta} \uparrow \\ \text{Tasa real} \downarrow \\ \text{Prima de riesgo} \downarrow\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Valor} \uparrow$$

RENDIMIENTO REQUERIDO Y TASA DE CAPITALIZACIÓN DE MERCADO

En la valuación de las acciones, el modelo más usual es el *modelo basado en los dividendos descontados*. Es una aplicación directa del concepto de renta perpetua.

Al comprar una acción el inversionista espera obtener un rendimiento del periodo de tenencia igual al rendimiento requerido. El rendimiento esperado es la suma del rendimiento por concepto de los dividendos y el rendimiento por concepto de la ganancia de capital.

$$E(R_H) = \frac{E(D_1)}{P_0} + \frac{E(P_1) - P_0}{P_0}$$

donde $E(R_H)$ es el rendimiento del periodo de tenencia esperado,
$E(D_1)$ es el valor del dividendo que se espera recibir al final del primer periodo,
$E(P_1)$ es el precio de venta esperado al final del primer periodo.

Si la acción de una empresa X cuesta \$45 y el inversionista espera venderla en un año a \$49 y recibir un dividendo de \$3, su rendimiento esperado en un año es:

$$E(R_H) = \frac{3 + 49 - 45}{45} = 0.1556 = 15.56\%$$

De este rendimiento, 6.67% corresponde al rendimiento por concepto de dividendo y 8.89% corresponde a la ganancia de capital.

La *tasa de capitalización de mercado* es el promedio ponderado de los rendimientos requeridos de todos los compradores de un activo.

¿Cómo sabe el inversionista si el rendimiento esperado es adecuado? El rendimiento es adecuado si es igual al que el mercado ofrece por instrumentos de riesgo equivalente. El consenso de mercado acerca de la tasa que compensa el riesgo de un activo particular se denomina *tasa de capitalización de mercado*, *k*. Para un inversionista que acepta el precio de mercado, la tasa de capitalización es igual al rendimiento requerido. Para la empresa emisora, la capitalización de mercado es el *costo de capital*.

La tasa de capitalización de mercado es la suma de la tasa libre de riesgo y la prima de riesgo.

$$k = R_F + \text{prima de riesgo}$$

El promedio de las primas de riesgo pagadas por todos los activos de riesgo se llama *prima de riesgo de mercado* (PRM).

$$\text{Prima de riesgo de mercado} = R_M - R_F$$

El rendimiento de mercado, R_M, es el promedio ponderado de los rendimientos de todas las acciones. En la práctica se aproxima por el desempeño de algún índice bursátil representativo. En Estados Unidos el índice utilizado con mayor frecuencia es el S&P 500.

Durante 76 años, entre 1926 y 2002, el rendimiento medio de las acciones de las empresas grandes fue de 12.04%, mientras que el rendimiento de los certificados del Tesoro (tasa libre de riesgo) fue de 3.82%. Esto sugiere que la prima de riesgo para las empresas grandes fue de 8.22%.

$$\text{Prima de riesgo de mercado} = R_M - R_F = 12.04 - 3.82 = 8.22$$

En términos reales (al eliminar la inflación) la prima de riesgo es de 4.66%.[1]

La prima de riesgo de mercado no es una constante inamovible. Su valor refleja el optimismo o pesimismo de los participantes en el mercado y cambia todo el tiempo. La prima de riesgo de mercado sube cuando aumenta la volatilidad de los rendimientos y cuando aumenta la aversión del público inversionista hacia el riesgo.[2] Baja en casos contrarios.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Volatilidad} \uparrow\\ \text{Aversión por el riesgo} \uparrow\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Prima de riesgo} \uparrow$$

Una vez que conocemos la prima de riesgo de mercado, ¿qué prima de riesgo asignar a un activo en particular? La respuesta es que la prima de riesgo de un activo particular debe ser proporcional a la contribución de dicho activo al riesgo de mercado. Un modelo que desarrolla este concepto es el modelo de valuación de activos de capital (CAPM, por sus siglas en inglés). Según el CAPM, la prima de riesgo del activo i es la prima de riesgo de mercado multiplicada por el coeficiente *beta* que refleja el riesgo sistemático del activo i. Matemáticamente, beta es la pendiente de la curva de regresión de los rendimientos del activo i, contra los rendimientos del mercado. Es la derivada de R_i respecto a R_M.

$$\beta_i = \frac{dR_i}{dR_M}$$

$\beta_i = 1.2$ significa, por ejemplo, que cuando el rendimiento del mercado sube (o baja) en 1%, el rendimiento del activo i sube (o baja) en 1.2%. En este caso el rendimiento del activo i es más volátil que el promedio del mercado. La inclusión de dicho activo en la cartera de mercado aumenta la volatilidad.

La beta del mercado es igual a 1: $\beta_M = \dfrac{dR_M}{dR_M} = 1$

Betas mayores que 1 implican variabilidad de rendimientos mayor que el promedio de mercado y betas menores que 1 implican una variabilidad menor. En términos generales las inversiones en activos con beta mayor que 1 se consideran como agresivas y las inversiones en activos con beta menor que 1 como defensivas.

$$\beta > 1 \Rightarrow \text{inversión agresiva}$$

$$\beta < 1 \Rightarrow \text{inversión defensiva}$$

[1] Los datos de 1871 a 1997 arrojan resultados similares. En este periodo el rendimiento promedio de las acciones fue de 7%, la tasa libre de riesgo de 1.7% y la prima de riesgo de 5.3%, todo en términos reales. (Jeremy Siegel, *Stocks for the Long Run*), 3a. ed., McGraw-Hill, 2002.

[2] Con mayor precisión: $R_M - R_F = 0.1 \cdot \overline{A} \cdot \sigma_M^2$, donde A barra es el coeficiente promedio de aversión hacia el riesgo y σ_M^2 es la varianza de los rendimientos de mercado.

Estadísticamente, el coeficiente beta se calcula como la razón de la covarianza entre el rendimiento del activo y el rendimiento de mercado y la varianza del rendimiento de mercado:

$$\beta_i = \frac{COV(R_i, R_M)}{VAR(R_M)}$$

Continuamos con el ejemplo de un inversionista que contempla la adquisición de acciones de la empresa X. Supongamos que la beta de esta empresa es 1.2, la prima de riesgo de mercado es de 6% y la tasa libre de riesgo es de 5%. En este caso el rendimiento justo que recompensa el riesgo del activo X es:

$$R_X = R_F + \beta_X(R_M - R_F) = 5\% + 1.2(6\%) = 12.2\%$$

Dado que el rendimiento esperado por el inversionista es de 15.56%, la inversión en las acciones de la empresa X parece un buen negocio. Si es un buen negocio o no, depende de qué tan exacta sea la estimación del dividendo y del precio de venta al final del año. Todo parece indicar que el inversionista encontró un activo subvaluado. Si su modelo de valuación y sus datos son correctos, obtendrá un rendimiento mayor que el requerido por el mercado para activos de riesgo equivalente. Habrá logrado así superar al mercado.

Obviamente no todos los inversionistas pueden superar al mercado que, por definición, es el promedio. Para cada inversionista que obtiene un rendimiento mayor que el promedio tiene que haber otro que obtenga uno menor. Ese rendimiento promedio es el requerido por todos los inversionistas. Es la tasa de capitalización de mercado.

El valor de un activo calculado mediante el descuento de los flujos de efectivo esperados por la tasa de capitalización de mercado se llama *valor intrínseco*.

En nuestro ejemplo, suponiendo que la tasa de capitalización del mercado es de 12.2%, el valor intrínseco de la acción de la empresa X es:

$$V_0 = \frac{E(D_1) + E(P_1)}{1+k} = \frac{3+49}{1.122} = 46.35$$

Al comparar el valor intrínseco con el precio de mercado ($45) llegamos a la conclusión de que la acción es subvaluada. Sin embargo, el grado de subvaluación es insignificante. Un pequeño error de estimación de alguno de los parámetros puede llevar fácilmente al rendimiento realizado por abajo del promedio.

Una acción está subvaluada si su rendimiento esperado es mayor que la tasa de capitalización de mercado y su valor intrínseco es mayor que el precio de mercado.

$$\left.\begin{aligned} E(R_H) &> k \\ V_0 &> P \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ la acción es subvaluada}$$

Los conceptos introducidos arriba, aunque son obvios para un experto, pueden parecer un tanto confusos para un principiante. Dada su importancia, ofrecemos un breve resumen.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Rendimiento requerido, tasa de capitalización, valor intrínseco y precio

El *rendimiento requerido* por un inversionista, R, concepto subjetivo, es el rendimiento mínimo esperado y necesario para que un inversionista compre un activo. El rendimiento requerido refleja una evaluación subjetiva de la prima de riesgo. La tasa de capitalización, k, en cambio, es un concepto objetivo que implica el rendimiento promedio requerido. La tasa de capitalización refleja la prima de riesgo evaluada por el mercado.

La tasa de capitalización *ex post* es el rendimiento que los diversos activos producen en el mercado. Es el rendimiento al vencimiento (TIR), calculado con base en los precios de mercado. Podemos obtenerla en las páginas de las secciones financieras de los periódicos o en los servicios de información computarizados.

Los rendimientos históricos sirven como puntos de referencia útiles, pero para fines de valuación es necesario calcular la tasa de capitalización *ex ante*. La manera más común de lograrlo es utilizando el modelo CAPM, el cual toma en cuenta todos los factores que determinan el rendimiento requerido.

$$k_i = R_i = R_F + \beta_i \left(R_M - R_F\right)$$

R_F, la tasa libre de riesgo, refleja las condiciones macroeconómicas tales como la oferta y la demanda, las políticas fiscal y monetaria, la propensión al ahorro, la tasa de crecimiento económico, la fuerza de la moneda nacional respecto de las monedas extranjeras, etcétera.

β_i refleja el riesgo no diversificable del activo *i*. ¿Qué tanto más (o menos) riesgoso es el activo *i* en comparación con el mercado en general?

$(R_M - R_F)$, la prima de riesgo de mercado, refleja el grado de volatilidad de los mercados y el grado de aversión hacia el riesgo del público inversionista.

El *valor intrínseco* de un activo es el valor presente de los flujos de efectivo netos que se espera que produzca en el futuro, calculado al utilizar como tasa de descuento la tasa de capitalización de mercado. Todos los inversionistas calculan el valor intrínseco de los activos al utilizar diferente información y diferentes métodos de valuación. El objetivo es detectar activos subvaluados o sobrevaluados.

Cuando el mercado está en equilibrio, el *precio de mercado* refleja el valor intrínseco estimado por todos los participantes. Obviamente es una media ponderada, en la cual el mayor peso corresponde a los participantes que compran (o venden) mayores cantidades del activo.

MODELO DE VALUACIÓN DE ACCIONES BASADO EN DIVIDENDOS DESCONTADOS

Para calcular el valor de una acción es necesario conocer la tasa de capitalización de mercado aplicable a dicha acción y evaluar los dividendos que la empresa pagará en el futuro. En la sección anterior discutimos cómo seleccionar la tasa de capitalización adecuada. Para obtener el pronóstico de utilidades y dividendos el inversionista puede estudiar los estados financieros de la empresa por su cuenta o puede utilizar los servicios de las empresas especializadas, como Value Line, Standard & Poors, Forbes, BusinessWeek, etcétera.

El valor intrínseco de una acción es el valor presente de la suma del dividendo esperado y el precio esperado de venta al fin del periodo. Para simplificar la notación omitiremos el operador de la esperanza matemática: P_1 en vez de $E(P_1)$.

$$V_0 = \frac{D_1 + P_1}{1+k}$$

donde V_0 es el valor intrínseco de la acción,
D_1 es el valor del dividendo que se espera recibir al final del periodo 1,
P_1 es el precio de venta de la acción esperado al final del periodo 1,
k es la tasa de capitalización de mercado (rendimiento requerido por el inversionista).

El precio al final del periodo 1 puede evaluarse como el valor intrínseco al término del mismo.

$$P_1 = V_1 = \frac{D_2 + P_2}{1+k}$$

Cuando el mercado está en equilibrio, el precio es igual al valor intrínseco. Al sustituir V_1 en lugar de P_1, tenemos:

$$V_0 = \frac{D_1}{1+k} + \frac{D_2 + P_2}{(1+k)^2}$$

Si pensamos vender la acción en el periodo m, su valor intrínseco será:

$$V_0 = \frac{D_1}{1+k} + \frac{D_2}{(1+k)^2} + \cdots + \frac{D_m}{(1+k)^m} + \frac{P_m}{(1+k)^m}$$

donde D_m es el valor del último dividendo recibido antes de vender la acción,
P_m es el precio de venta de la acción al final del periodo m.

¿Cuál será el valor de venta de la acción en el periodo m? Al utilizar el modelo de valuación basado en los dividendos, este valor será igual al valor presente de los dividendos que producirá la acción del periodo m en adelante. Así, el valor intrínseco de la acción es el valor presente de todos los dividendos que pagará la acción hasta el infinito:

$$V_0 = \frac{D_1}{1+k} + \frac{D_2}{(1+k)^2} + \frac{D_3}{(1+k)^3} + \cdots + \frac{D_\infty}{(1+k)^\infty} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k)^t}$$

La fórmula presentada arriba se llama *modelo de dividendos descontados* del precio de acciones, aunque es poco útil porque resulta difícil evaluar el valor de los dividendos más allá del primer periodo.

En el caso de algunas industrias maduras, puede ser razonable suponer que en el futuro los dividendos se mantendrán constantes en términos reales, es decir, que crecerán sólo al ritmo de la inflación. Si este supuesto es realista, el modelo se reduce a una renta perpetua cuyo valor presente es:

$$V_0 = \frac{D_1}{k}$$

Al aplicar esta fórmula es necesario recordar que la tasa de capitalización de mercado debe ser expresada en términos reales: la tasa libre de riesgo real más la prima de riesgo en términos reales.

$$k = r_F + \text{prima de riesgo real.}$$

Si la tasa real libre de riesgo es de 2% y la prima de riesgo en términos reales es de 5%, el valor de una acción de empresa que pagará los dividendos constantes de $4 a perpetuidad sería:

$$V_0 = \frac{4}{0.02 + 0.05} = 57.14$$

La valuación es muy sensible al valor de la prima de riesgo. Si la prima de riesgo baja a 3%, el valor de la acción sube a $80. Si la prima de riesgo sube a 8%, el valor de la empresa baja a $40.

Un caso más general se da cuando es posible suponer que cada año el dividendo crece a una tasa constante, g.

$$D_t = D_0 (1+g)^t \quad \Rightarrow \quad D_1 = D_0 (1+g)$$

El modelo basado en este supuesto se llama *modelo de dividendos descontados que crecen a una tasa constante* o, simplemente, *modelo de Gordon*.

La fórmula para el valor intrínseco de una empresa que paga dividendos crecientes a un ritmo constante es:

$$V_0 = \frac{D_0 (1+g)}{1+k} + \frac{D_0 (1+g)^2}{(1+k)^2} + \frac{D_0 (1+g)^3}{(1+k)^3} + \cdots + \frac{D_0 (1+g)^\infty}{(1+k)^\infty}$$

Se trata claramente de una renta perpetua de pagos crecientes a una tasa constante. La fórmula para la anualidad de pagos crecientes a un ritmo constante, desarrollada en el capítulo anterior, es:

$$VPA = \frac{a_1}{R-g}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^n\right]$$

Ya demostramos que si $R > g$, el valor de esta suma tiende a $\dfrac{a_1}{R-g}$.

Al cambiar los símbolos obtenemos la fórmula del valor intrínseco de la acción basado en dividendos descontados que crecen a una tasa constante, g.

$$\boxed{V_0 = \frac{D_1}{k - g}}$$

El valor teórico calculado así puede ser comparado con el precio de mercado de la acción. Si el analista tiene confianza en su modelo y si el precio de mercado es menor que el valor teórico, el analista tiene razones para suponer que actualmente la acción se encuentra subvaluada, lo que puede ser motivo de compra. Lo contrario sucede si el precio de mercado resulta mayor que el valor teórico.

El modelo de dividendos descontados con tasa de crecimiento constante es el modelo que más se utiliza en la valuación de acciones. Según éste, el valor de una acción crece si:

1. Aumenta el dividendo esperado.
2. Se reduce la tasa de capitalización de mercado (a consecuencia de una reducción de la tasa libre de riesgo o como resultado de una reducción de la prima de riesgo de la empresa).
3. Aumenta la tasa esperada de crecimiento de los dividendos.

La prima de riesgo para una empresa puede bajar porque baja su beta o la prima de riesgo de mercado. Esto último sucede si se reduce la volatilidad de mercado, o si el público inversionista empieza a tolerar mejor el riesgo.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dividendo esperado}\uparrow \\ \text{Tasa libre de riesgo}\downarrow \\ \text{Prima de riesgo}\downarrow \\ \text{Crecimiento de los dividendos}\uparrow\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{Valor}\uparrow$$

El modelo de dividendos descontados es sensible al supuesto de que la tasa de crecimiento de los dividendos debe ser menor que el costo de capital: $g < k$. Recordemos que la derivación de la fórmula se hizo con base en este supuesto. Si los dividendos crecieran a una tasa mayor que el costo de capital, el valor de la empresa sería infinito. Un momento de reflexión es suficiente para constatar que el supuesto $g < k$ es bastante realista. Aun cuando en unos cuantos años la tasa de crecimiento de los dividendos pueda rebasar el costo de capital, esta situación no durará indefinidamente.

La fórmula del valor basado en dividendos descontados explica por qué una política monetaria restrictiva del Banco Central invariablemente reduce el valor de las acciones. Al reducirse la oferta monetaria, suben las tasas de interés y al mismo tiempo bajan las proyecciones de las utilidades (y dividendos).

$$\text{Restricción monetaria} \Rightarrow \begin{Bmatrix} k \quad \uparrow \\ E(D)\downarrow \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad V\downarrow$$

donde $E(D)$ son dividendos esperados.

La restricción monetaria reduce el valor de las acciones.

En cambio, una política monetaria expansiva tiene un impacto un tanto ambiguo. Por un lado, las tasas de interés reales bajan, lo que reduce la tasa de capitalización de mercado, y las expectativas sobre las utilidades futuras mejoran. Por otro lado, aumenta la inflación esperada, lo que sube la tasa de capitalización en términos nominales y pueden, asimismo, subir las primas de riesgo porque la expansión monetaria generalmente anuncia una inestabilidad económica futura.

$$\text{Expansión monetaria} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{cases} r\downarrow \\ E(i)\uparrow \\ (R_M - R_F)\uparrow \\ E(D)\uparrow \end{cases}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V\uparrow \quad \text{o} \quad V\downarrow \\ \text{Resultado indeterminado} \end{cases}$$

Otra consecuencia importante del modelo basado en dividendos descontados con crecimiento constante es que el precio de las acciones crece a la misma tasa que los dividendos. Para ver esto escribimos las fórmulas:

$$P_0 = \frac{D_1}{k-g}, \qquad P_1 = \frac{D_2}{k-g}, \qquad D_2 = D_1(1+g)$$

Ahora despejamos P_1 en términos de P_0 y g:

$$P_1 = \frac{D_2}{k-g} = \frac{D_1(1+g)}{k-g} = P_0(1+g)$$

$$\frac{P_1}{P_0} = 1+g$$

Según el modelo de dividendos descontados, el precio de la acción y el valor de la empresa deben crecer al mismo ritmo que los dividendos.

EJEMPLO 1

Se espera que al final del año la empresa X pague un dividendo de \$5.5. Durante los últimos años, éste creció a un ritmo anual de 6% que, suponemos, no cambiará. El rendimiento requerido para este tipo de empresas es de 16%. ¿Cuál es el valor teórico de la acción de la empresa X?

Solución:

$$D_1 = 5.5, \qquad k = 16\%, \qquad g = 6\%$$

Al sustituir los datos del problema en la fórmula de valor de la acción, tenemos:

$$V_0 = \frac{D_1}{k-g} = \frac{5.5}{0.16-0.06} = 55$$

Respuesta: El valor teórico de la acción de la empresa X es de \$55. Si el precio de mercado de la acción es mucho más bajo, podemos comprarla en espera de una posible apreciación.

Al invertir la fórmula del valor de la empresa basado en los dividendos descontados se puede calcular el costo de capital contable de la empresa. Explicaremos este concepto mediante un ejemplo.

EJEMPLO 2

Supongamos que la misma empresa X del ejemplo 1 contempla un proyecto de inversión y pretende financiarlo con una emisión de nuevas acciones. Éstas se venden en la bolsa de valores a \$48. ¿Cuál es el costo de capital contable de la empresa aplicable al descuento de los flujos de efectivo esperados del proyecto de inversión?

$$P_0 = \$48, \qquad D_1 = 5.5, \qquad g = 6\%$$

Solución: En el contexto de este problema no tenemos el rendimiento requerido. Lo que tratamos de calcular es el costo de capital contable de las nuevas acciones k_s, igual a la tasa de capitalización del mercado. En este caso la fórmula del valor de la empresa se convierte en:

$$P_0 = \frac{D_1}{k_s - g}$$

donde el precio de la acción, P_0, es determinado por el mercado.

Al despejar de esta fórmula k_s obtenemos una fórmula para el *costo de capital contable de la empresa*, determinado con base en el precio de acciones.

$$\boxed{k_s = \frac{D_1}{P_0} + g}$$

Al sustituir en esta fórmula los datos del problema tenemos:

$$k_s = \frac{5.5}{48} + 0.06 = 0.1746 = 17.46\%$$

Respuesta: El costo de capital de la empresa X, aplicable para el descuento de los flujos de efectivo de un proyecto de inversión financiado con la emisión de nuevas acciones es de 17.46%.

El bajo precio que la empresa obtuvo en la venta de las nuevas acciones se refleja en un alto costo de capital. Es posible que el mercado considere que el nuevo proyecto es bastante riesgoso.

El primer término de la fórmula del costo de capital contable (D_1/P_0) es el rendimiento por concepto de dividendos. Su valor está disponible en las publicaciones financieras. El segundo término, g, es la tasa de crecimiento de los dividendos. Explicaremos cómo estimar su valor más adelante.

El rendimiento requerido por el mercado (la tasa de capitalización de mercado) representa para la empresa el costo de capital contable adecuado para descontar los flujos de efectivo de proyectos financiados con la emisión de nuevas acciones. Es el consenso de mercado acerca de la prima de riesgo que debe pagar la empresa. El procedimiento para evaluar la tasa de descuento del proyecto de inversión, esbozado arriba, es correcto siempre y cuando el riesgo del proyecto sea igual al riesgo promedio de la empresa.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Para financiar su expansión, la empresa Avante pretende colocar una nueva emisión de acciones. Se espera que en el presente ejercicio ésta pague un dividendo de $4.5. Durante los últimos años los dividendos pagados por la empresa crecían a un ritmo promedio de 10% anual.

a) ¿Cuánto puede recibir la empresa por cada una de sus acciones si el rendimiento requerido por los inversionistas es de 15%?

b) ¿Cuál sería el costo de capital para la empresa si sus acciones se vendieran a un precio promedio de $83.5?

Respuestas: *a*) $90, *b*) 15.39%.

Tratamiento de la inflación

La fórmula del valor intrínseco basado en dividendos descontados con crecimiento constante puede ser aplicada tanto en términos nominales como reales. En el ejemplo 1 utilizamos la versión en términos nominales. Ahora supongamos que la inflación es de 3% anual. El valor teórico se puede calcular con el método aproximado o con el método exacto.

Método aproximado

Si la tasa de capitalización en términos nominales es de 16% y la inflación anual es de 3%, en términos reales, la primera será de 13%.

$$k_r = k - i = 16\% - 3\% = 13\%$$

Si la tasa de crecimiento de los dividendos en términos nominales es de 6%, en términos reales será de 3%.

$$g_r = g - i = 6\% - 3\% = 3\%$$

El valor intrínseco es:

$$V_0 = \frac{D_1}{k_r - g_r} = \frac{5.5}{0.13 - 0.03} = 55$$

Obviamente el resultado es idéntico que el calculado en términos nominales.

Método exacto

Al utilizar la ecuación de Fisher, la tasa de capitalización real es:

$$1+k_r = \frac{1+k}{1+i} = \frac{1.16}{1.03} = 1.1262 \quad \Rightarrow \quad k_r = 12.62\%$$

Con la misma metodología la tasa de crecimiento real es:

$$1+g_r = \frac{1+g}{1+i} = \frac{1.06}{1.03} = 1.0291 \quad \Rightarrow \quad g_r = 2.91\%$$

Al utilizar estos valores en la fórmula del valor, tenemos:

$$V_0 = \frac{D_1}{k_r - g_r} = \frac{5.5}{0.11262 - 0.0291} = 56.65$$

Parece que el resultado es diferente, sin embargo, un momento de reflexión es suficiente para darnos cuenta de que D_1 está expresado en precios del fin del periodo 1, igual que V_0. Para obtener su valor a precios del periodo cero es necesario dividir 56.65 entre 1.03.

$$\frac{56.65}{1.03} = 55$$

Otra vez, el resultado es el mismo que el calculado en términos nominales.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Regla práctica

Si la tasa de capitalización de mercado está expresada en términos nominales, la tasa de crecimiento de los dividendos también debe ser expresada en los mismos términos.

Si la tasa de capitalización de mercado está expresada en términos reales, la tasa de crecimiento de los dividendos también debe ser expresada en esos términos.

MODELOS DE VALUACIÓN BASADOS EN RAZONES FINANCIERAS

En el desarrollo de este tema utilizaremos los siguientes símbolos:

P precio de la acción,
E utilidades de la empresa por acción (*earnings per share EPS*), esperados para el fin del periodo en curso,
k rendimiento del capital contable de la empresa,
V valor de la empresa por acción.

Caso 1: utilidades constantes

Si suponemos que las utilidades permanecerán constantes en el futuro previsible, podemos tratarlas como una renta perpetua. El hecho de que las utilidades de la empresa sean variables no invalida nuestro supuesto de que constituyen una renta perpetua. Si la estimación de las utilidades cambia, el valor de la empresa también cambiará y será necesario efectuar un nuevo cálculo. Al utilizar el concepto de renta perpetua evaluamos el valor de la empresa como:

$$V = \frac{E}{k}$$

En un mercado eficiente, el precio de una acción es igual a su valor teórico:

$$P = \frac{E}{k}$$

Al despejar *k* de esta ecuación tenemos:

$$\boxed{k = \frac{E}{P} = \frac{1}{\left(\frac{P}{E}\right)}}$$

De esta manera establecimos un resultado muy importante: el rendimiento del capital contable de una empresa sin crecimiento es el recíproco de la relación precio/utilidad (P/E).

Caso 2: utilidades crecientes

Si las utilidades de la empresa crecen a un ritmo constante, g, la fórmula del precio se modifica de la siguiente manera:

$$P = \frac{E}{k - g} \qquad \Rightarrow \qquad k - g = \frac{1}{\left(\frac{P}{E}\right)}$$

En este caso, el recíproco de la razón P/E se interpreta como el costo de capital contable menos la tasa de crecimiento.

En la bolsa de Nueva York, la relación P/E menor de 10 es considerada baja, y por arriba de 20, alta. Es probable que todas las empresas con la razón P/E por arriba de 20 tengan incluido en su precio el crecimiento futuro.

$$P/E = 10 \qquad \Rightarrow \qquad k = 10\%$$

$$P/E = 20 \qquad \Rightarrow \qquad k - g = 5\%$$

En el segundo caso, para determinar el costo de capital contable es necesario estimar la tasa de crecimiento de las utilidades.

En general, cuando la relación *P*/*E* baja, el rendimiento del capital contable sube.

$$\left(\frac{P}{E}\right)\downarrow \quad \Rightarrow \quad k\uparrow$$

Esto sucede si aumenta la prima de riesgo, como en el caso de empresas pequeñas, nuevas, o aquellas cuyo futuro es inseguro. El costo de capital para éstas es relativamente alto.

Cuando la relación *P*/*E* es alta, la prima de riesgo puede ser baja, o bien, la empresa tiene excelentes expectativas de crecimiento.

Si la *P*/*E* rebasa 30 ($k - g = 3.3\%$), para que el inversionista obtenga un rendimiento de 12% sobre su inversión las utilidades de la empresa tienen que crecer a un ritmo de 8.7% anual.

Los inversionistas que compran acciones con *P*/*E* alta esperan que las utilidades de esas empresas crezcan en el futuro.

El precio de las acciones está determinado por la oferta y la demanda en el mercado de valores. Si el precio de una acción sube, esto puede reflejar una de las siguientes causas:

a) el mercado modificó al alza las utilidades esperadas de la empresa,

b) aumentó el crecimiento esperado de las utilidades de la empresa,

c) bajó el rendimiento requerido porque se redujo el riesgo de la empresa o porque bajó la tasa libre de riesgo.

EJEMPLO 1

El precio de una acción de Microsoft es tal que la relación *P*/*E* es igual a 80. El mercado espera que las utilidades de la empresa crezcan en el futuro a un ritmo de 10% anual. ¿Cuál es el rendimiento del capital contable de Microsoft?

Solución:

$$k - g = \frac{1}{\left(\frac{P}{E}\right)} = \frac{1}{80} = 0.0125 = 1.25\% \quad \Rightarrow \quad k = 11.25\%$$

Con base en la razón actual *P*/*E*, la tasa de rendimiento de las acciones de Microsoft es de tan sólo 11.25% anual. Los inversionistas esperan un alto crecimiento de las utilidades en el futuro, en virtud de la posición monopolística de la empresa en el mercado y de su capacidad para desarrollar productos innovadores que ganan la aceptación de los usuarios.

¿Cómo se calcula la razón *P*/*E* en un momento dado? La práctica generalizada es utilizar el precio de hoy y dividirlo entre las utilidades netas después de los impuestos de los últimos 12 meses.

$$\frac{P}{E} = \frac{\text{Precio de hoy}}{\text{Utilidades de los últimos 12 meses}}$$

¿Cómo utilizar la razón para calcular el valor de una empresa? El procedimiento generalmente aceptado es estimar las utilidades por acción para el fin del periodo y multiplicarlas por una razón *P*/*E* histórica (normal) de la misma empresa, o algún promedio industrial de empresas semejantes.

$$V_0 = \underbrace{\left(\frac{P}{E}\right)}_{\text{razón histórica}} \times \underbrace{E(EPS)}_{\substack{\text{utilidades}\\\text{esperadas}}}$$

EJEMPLO 2

Durante los últimos 20 años, el precio de las acciones de la empresa XZY era en promedio 20 veces sus utilidades. Para el año en curso se prevé que las utilidades por acción serán de \$3.5. ¿Cuál es el valor de la empresa?

Solución: El valor basado en el múltiplo precio/utilidad es $20 \cdot (3.5) = \$70$.

Si los inversionistas no están de acuerdo con esta valuación, el precio de mercado de la acción puede ser más alto o más bajo. Si el precio de mercado es más alto que el calculado con base en la *P*/*E* histórica, la razón *P*/*E* actual subirá.

Respuesta: Si el precio de acción de la empresa XYZ del ejemplo 2 es de \$85, la razón *P*/*E* es de $85/3.5 = 24.3$, más que el promedio histórico de 20.

El lector puede estar confundido. Si es el mercado el que determina la razón *P*/*E*, ¿qué sentido tiene utilizar la razón histórica para calcular el valor teórico de la empresa? La respuesta es que pretendemos tener algún punto de referencia. Según los estándares históricos, ¿el precio actual es alto o bajo? Si las acciones se negocian muy por debajo de sus niveles históricos podemos tener razones para suponer que la empresa está subvaluada y tiene un potencial de apreciación. Lo contrario sucede si las acciones se negocian muy por arriba de sus niveles históricos.

Una *P*/*E* alta es benéfica para la empresa porque baja el costo de capital, lo que facilita el financiamiento de proyectos de inversión, defiende a la empresa contra los intentos de adquisición hostil y aumenta el valor de las opciones sobre las acciones de la empresa que constituyen una parte importante de las compensaciones de los altos ejecutivos.

Son muchos los factores que pueden aumentar la razón *P*/*E*. Los más importantes incluyen:

1. Perspectivas favorables de crecimiento futuro. Se trata tanto del crecimiento de las ventas como de las utilidades.
2. Inflación a la baja. Las expectativas de la inflación forman parte de la tasa libre de riesgo y, a través de ésta, de la tasa de capitalización del mercado. Al bajar la tasa de capitalización sube el múltiplo *P*/*E*.
3. Menor apalancamiento. Al reducirse la razón deuda/capital contable baja la prima de riesgo que debe pagar la empresa, lo que reduce la tasa de capitalización (el rendimiento requerido).

4. Calidad de la administración. Si el mercado aprueba el estilo de la actual administración de la empresa, la recompensa con una alta razón *P/E*.
5. Calidad de las utilidades. Las empresas que siguen prácticas contables conservadoras y no inflan sus utilidades con trucos contables son recompensadas con una alta razón *P/E*.
6. Percepción de un menor riesgo futuro. Se trata tanto del riesgo macroeconómico como del riesgo a nivel sector y a nivel empresa.
7. Política de dividendos. Las empresas con un reconocido potencial de crecimiento rentable, que retienen la mayor parte de sus utilidades para financiar los proyectos de expansión, tienen múltiplos *P/E* altos.

Otros factores que afectan al múltiplo *P/E* comprenden: políticas del Banco Central, déficit fiscales, entorno internacional, credibilidad de los gobiernos, confianza de la población, progreso tecnológico, el ciclo de los negocios, etcétera.

En el 2000 las razones *P/E* eran más altas que los promedios históricos.[1] Los expertos argumentaban que eso se debía a la *nueva economía*.

La nueva economía consiste en innovación tecnológica acelerada (computación, telecomunicaciones, internet), apertura de los mercados (globalización), desregulación y políticas fiscal y monetaria prudentes. La nueva economía aumenta la productividad de los factores, generando un alto crecimiento con baja inflación. Las empresas de alta tecnología, sobre todo las relacionadas con internet, tenían perspectivas de crecimiento tan buenas que sus *P/E* rebasaban en ocasiones 100. Ahora ya sabemos que este optimismo no era justificado y las valuaciones regresaron a sus niveles históricos.

Aun cuando la fórmula de valuación basada en el múltiplo *P/E* es exageradamente sencilla, su aplicación práctica es un verdadero arte. ¿Qué razón *P/E* seleccionar para estar en línea con la apreciación del mercado? ¿Cómo estimar las utilidades de la empresa en una situación de volatilidad e incertidumbre? Estas habilidades se adquieren sólo con una larga práctica.

La metodología del modelo de valuación basado en el múltiplo *P/E* puede ser extendida para incluir otras razones financieras. Primero se establece una razón histórica y después se multiplica por el valor actual (o estimado). El valor teórico de la acción así obtenido se compara con el precio de mercado para ver si las acciones se venden a un precio por arriba o por debajo de los promedios históricos. A continuación, a manera de ejemplo, describiremos algunos modelos de este tipo.

Modelo basado en la razón precio/ventas

Primero es necesario establecer la razón histórica precio/ventas:

$$\frac{P}{SPS} = \frac{\text{Precio promedio}}{\text{Ventas medias por acción}}$$

Los promedios se calculan en un periodo prolongado, por ejemplo, los últimos 10 años. *SPS* significa *sales per share*.

[3] El múltiplo promedio de las empresas incluidas en el S&P 500 fue de 28, contra el promedio histórico de 15.

Ahora ya podemos calcular el precio teórico de la acción como el producto del múltiplo histórico precio/ventas por el pronóstico de ventas para el año en curso.

$$\boxed{V_0 = \frac{P}{SPS} \cdot E(\text{Ventas})}$$

Modelo basado en la razón precio/valor en libros

La razón histórica precio/valor en libros es:

$$\frac{P}{BVPS} = \frac{\text{Precio promedio}}{\text{Valor en libros por acción promedio}}$$

BVPS significa *book value per share*.

El precio teórico es el producto del múltiplo precio/valor en libros por el valor en libros estimado para el año en curso.

$$\boxed{V_0 = \frac{P}{BVPS} \cdot E(BVPS)}$$

Modelo basado en la razón precio/flujo de efectivo promedio

La razón histórica precio/flujo de efectivo promedio es:

$$\frac{P}{CFPS} = \frac{\text{Precio promedio}}{\text{Flujo de efectivo por acción promedio}}$$

CFPS significa *cash flow per share*.

El precio teórico es el producto del múltiplo precio/flujo de efectivo promedio por el flujo de efectivo estimado para el año en curso.

$$\boxed{V_0 = \frac{P}{CFPS} \cdot E(CFPS)}$$

Los modelos basados en otras razones financieras (que no sean la razón P/E) son utilizados con frecuencia porque estas razones son menos volátiles que el múltiplo P/E. Si los resultados de valuación con diferentes métodos coinciden, el analista adquiere más confianza para tomar la decisión de compra o venta.

MODELOS DE VALUACIÓN BASADOS EN OPORTUNIDADES DE INVERSIÓN

El múltiplo *P/E* depende de cómo el mercado evalúa el potencial de crecimiento de la empresa. Al combinar el modelo de los dividendos descontados con el modelo basado en la razón *P/E*, demostraremos que lo que el mercado recompensa no es el crecimiento en sí, sino las oportunidades de inversión en proyectos cuya rentabilidad es mayor que el costo de capital de la empresa.

En primer lugar, definimos las utilidades netas como utilidades netas de la *depreciación económica*. Ésta se refiere al costo de mantener intacto el capital físico de la empresa. Es el costo de las reparaciones y reemplazo de los elementos de capital desgastados, de manera que la capacidad de la empresa se mantiene constante. La depreciación económica depende de la edad promedio de los elementos de capital, del ritmo de la obsolescencia tecnológica, del tipo de mantenimiento que se da a la maquinaria y el equipo, etcétera.

La utilidad neta de la depreciación económica puede ser muy diferente de la utilidad en el sentido contable. Es la cantidad máxima que la empresa puede pagar a sus inversionistas, sin que su capacidad instalada se deteriore.

La inversión total de la empresa se llama la inversión bruta. La parte de la inversión dedicada a mantener intacta la capacidad instalada se llama depreciación económica y el resto (si es que existe) se llama inversión neta.

El objetivo de la *inversión neta* es aumentar la capacidad productiva de la empresa.

$$\text{Inversión neta} = \text{inversión total} - \text{depreciación económica.}$$

$$I_N = I_T - \text{dep}$$

La inversión neta puede ser financiada con una parte de las utilidades. El porcentaje de las utilidades dedicado a la inversión neta se llama *coeficiente de retención*, o *tasa de reinversión* de las utilidades. En términos por acción es la parte de las utilidades por acción no distribuida como dividendo. Al coeficiente de retención lo designaremos *b*.

$$b = \frac{E - D}{E} = 1 - \frac{D}{E}$$

donde b es el coeficiente de retención (reinversión) de utilidades,
E es la utilidad neta por acción (*EPS*),
D es el dividendo por acción (*DPS*),
D/E es la razón de pago de los dividendos (*payout ratio*).

La parte no distribuida de las utilidades se invierte en nuevos proyectos de inversión. El rendimiento de estos proyectos se designa con la letra *y*. Es el rendimiento sobre el capital contable (*ROE*) marginal; esto es aplicable sólo a los incrementos de capital.

Cuando el analista no tiene información específica sobre el rendimiento esperado de nuevos proyectos, la práctica estándar consiste en suponer que este rendimiento es igual al rendimiento del capital contable promedio:

$$y = ROE$$

ROE (*return on equity*) es el rendimiento histórico sobre el capital contable de la empresa. En otras palabras, es el rendimiento sobre la acumulación de todos los proyectos anteriores emprendidos por la empresa. Suponer que el rendimiento de los nuevos proyectos es igual a *ROE* implica que estos proyectos son típicos de la empresa.

Los nuevos proyectos de inversión, una vez puestos en funcionamiento, incrementan las utilidades. La tasa de crecimiento de las utilidades depende de la cantidad de la nueva inversión y de su rentabilidad. En términos simbólicos, tenemos:

$$g = \frac{\Delta E}{E} = \underbrace{\left(\frac{\Delta E}{I_N}\right)}_{y} \cdot \underbrace{\left(\frac{I_N}{E}\right)}_{b} = y \cdot b$$

donde: $\Delta E = E_1 - E_0$ es el incremento de las utilidades en un año,
g es la tasa de crecimiento de las utilidades,
I_N es la nueva inversión neta,
y es el rendimiento de las nuevas inversiones,
b es el coeficiente de reinversión de las utilidades.

El incremento de las utilidades dividido entre la inversión neta es el rendimiento de las nuevas inversiones, y. La participación de la inversión neta en las utilidades es lo mismo que el coeficiente de retención, b, dado que la parte de las utilidades no distribuida en dividendos se invierte:

$$I_N = E - D$$

La inversión es neta porque las utilidades son netas del costo de reposición de capital.

Así, hemos establecido que la tasa de crecimiento de las utilidades es directamente proporcional al rendimiento de las inversiones nuevas, y, así como a la proporción de las utilidades que se dedican a la inversión neta, b.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Crecimiento de las utilidades y la tasa de reinversión

Hay una manera alternativa de llegar al resultado de la tasa de crecimiento de las utilidades, que es igual al producto del coeficiente de retención por el rendimiento de las nuevas inversiones. Primero observamos que, a menos que se emprendan proyectos nuevos, la utilidad será constante. Si la empresa emprende proyectos nuevos, la utilidad en el periodo siguiente será igual a la utilidad del periodo actual más el incremento de las utilidades. Si la única fuente de financiamiento de la nueva inversión es la reinversión de una parte de las utilidades actuales, el incremento de las utilidades es igual a la parte retenida de las utilidades multiplicada por el rendimiento de estas utilidades. Al expresar esta frase en términos simbólicos, tenemos:

$$E_1 = E_0 + b \cdot E_0 \cdot y = E_0 (1 + b \cdot y)$$

Al dividir ambos lados entre E_0, tenemos:

$$\frac{E_1}{E_0} = 1 + g = 1 + b \cdot y \qquad \Rightarrow \qquad g = b \cdot y$$

Los dividendos son iguales a la parte no reinvertida de las utilidades:

$$b = 1 - \frac{D}{E} \quad \Rightarrow \quad D = E(1 - b)$$

Si sustituimos esta expresión en la fórmula del valor de la acción del modelo de dividendos descontados con crecimiento constante, y dado que $g = y \cdot b$, tenemos:

$$\boxed{V_0 = \frac{D}{k - g} = \frac{E(1 - b)}{k - y \cdot b}}$$

donde D y E se refieren a los valores estimados para el fin del periodo.[4]

Si el coeficiente de retención de utilidades, b, se mantiene constante en el tiempo, los dividendos crecerán a la misma tasa, g, que las utilidades.

$$b = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta E}{E} = g$$

¿Cómo afectan las oportunidades de crecimiento al valor? Explicaremos este tema con base en algunos ejemplos numéricos.

EJEMPLO 1

Una empresa produce utilidades por acción de $6 y las distribuye en forma de dividendos. Esto implica que el coeficiente de retención es igual a cero. El costo de capital de la empresa es de 15%. Dado que no existe inversión neta, las utilidades (dividendos) se mantienen constantes en el tiempo.[5] Calcule el valor teórico de la empresa.

$$D = E = 6, \qquad b = 0, \qquad k = 15\%$$

[4] La fórmula del valor de la empresa con la reinversión de una parte de utilidades no funciona si la empresa no paga dividendos, es decir, si retiene 100% de sus utilidades. En este caso $b = 1$ y el numerador es igual a cero. La empresa no vale nada. Este resultado contradice la realidad. Hay muchas empresas que no pagan ni un centavo de dividendos y sin embargo su valor es positivo. Trataremos este caso como una anomalía matemática. Otra anomalía de la fórmula es que no permite que $y \cdot b$ sea mayor que k, porque al suceder esto produce un valor negativo.

[5] Incluso si no hay inversión económica neta, las utilidades pueden crecer como consecuencia de un mejoramiento en los métodos de administración (reducción de costos), mejor capacitación y experiencia de los trabajadores (curva de aprendizaje, mejor posicionamiento del producto en el mercado, etc. Sin embargo, en ausencia de una nueva inversión, el incremento de las utilidades es tan pequeño (menor a 1%) que puede ser pasado por alto. Además, la mayor parte del progreso tecnológico está incorporada en la maquinaria y el equipo. Una empresa que no invierte no puede aprovechar este progreso tecnológico.

Solución: Para estimar el valor de la empresa utilizamos la fórmula del valor presente de la renta perpetua:

$$V_0 = \frac{D}{k} = \frac{6}{0.15} = 40$$

Respuesta: El valor de la empresa sin crecimiento es de $40.

EJEMPLO 2

Un ejecutivo de la empresa del ejemplo 1 propone un proyecto de inversión, cuyo rendimiento esperado es de 18%. Para financiar este proyecto es necesario retener 60% de las utilidades. ¿Cómo afectaría la aprobación del proyecto el valor teórico de la empresa?

$$y = 18\%, \qquad b = 0.6$$

$$V_0 = \frac{E(1-b)}{k - y \cdot b} = \frac{6 \cdot (1-0.6)}{0.15 - 0.18 \cdot 0.6} = 57.14$$

Respuesta: Aun cuando el dividendo pagado bajó de $6 a $2.4, el valor de la empresa subió de $40 a $57.14.

Es claro que el mercado recompensa los planes de expansión de la empresa.

Si el mercado recompensa el crecimiento, ¿por qué las empresas no invierten más en nuevos proyectos? La respuesta es que el mercado recompensa sólo los proyectos cuyo rendimiento esperado es mayor que el costo de capital para la empresa.

¿Cuál sería el valor de la empresa si el mercado evaluara el rendimiento del nuevo proyecto como 12%? (y = 12%).

$$V_0 = \frac{6 \cdot (1-0.6)}{0.15 - 0.12 \cdot 0.6} = 30.77$$

Si el rendimiento esperado de un nuevo proyecto de inversión es menor que el costo de capital, el valor de la empresa baja.

Los proyectos de expansión aumentan el valor de la empresa sólo si su rendimiento es mayor que el costo de capital de la empresa.

Si el rendimiento del proyecto fuese de 15%, el valor de la empresa no cambiaría en absoluto.

$$V_0 = \frac{6 \cdot (1-0.6)}{0.15 - 0.15 \cdot 0.6} = 40$$

La diferencia entre el valor de la empresa con la reinversión de una parte de sus utilidades y el valor sin esta reinversión se llama *valor presente de las oportunidades de crecimiento*: $VP(OC)$.

Este valor es positivo, si y sólo si el rendimiento esperado de los nuevos proyectos es mayor que el costo de capital.

$$VP(OC) = \frac{E \cdot (1-b)}{k - y \cdot b} - \frac{E}{k} = \frac{E \cdot b \cdot (y-k)}{k \cdot (k - y \cdot b)}$$

Si el rendimiento del nuevo proyecto es de 18%, el valor de la empresa es de \$57.14. Este valor puede ser descompuesto en un valor sin crecimiento (\$40) y el valor presente de las oportunidades de crecimiento (\$17.14).

Valor = valor sin crecimiento + valor presente de oportunidades de crecimiento

$$57.14 = 40 + 17.14$$

Es fácil comprobar que:

$$\frac{E(1-b)}{k - y \cdot b} > \frac{E}{k} \qquad \text{si y sólo si} \qquad y > k$$

El valor de una empresa que crece, reinvirtiendo parte de sus utilidades, puede ser visto como la suma de su valor sin crecimiento (E/k) y el valor presente de sus oportunidades de crecimiento, $VP(OC)$.

$$V_0 = \frac{E}{k} + VP(OC) = \frac{E(1-b)}{k - y \cdot b} \qquad VP(OC) > 0 \quad \text{si} \quad y > k$$

Cuando el rendimiento de un proyecto de inversión es mayor que el costo de capital, el valor presente neto del proyecto es positivo, y su realización aumenta el valor de la empresa.

$$y > k \qquad \Rightarrow \qquad VPN > 0$$

Si una empresa no tiene oportunidades de crecimiento rentable, no tiene caso reinvertir sus utilidades. Todas éstas deben ser pagadas a los accionistas en forma de dividendos. Empresas de este tipo, que usualmente operan en las industrias maduras o en declive, suelen llamarse “vacas de efectivo” (*cash cows*).

Regresemos al ejemplo 2. Al reinvertir la empresa 60% de sus utilidades el dividendo pagado al final del primer periodo se reduciría en \$3.6:

$$6 - 2.4 = 3.6$$

Este es el costo por acción del nuevo proyecto. Al mismo tiempo, las utilidades por acción aumentarían \$0.648 a perpetuidad:

$$\Delta E = E \cdot g = 6 \cdot (0.108) = 0.648$$

El valor presente de esta perpetuidad es 0.648/0.15 = 4.32 y el valor presente neto del proyecto por acción al final del periodo 1 es:

$$-3.6 + 4.32 = 0.72$$

Ahora supongamos que, en vez de un solo proyecto con el rendimiento de 18%, la empresa tiene una oportunidad constante de invertir con el rendimiento de 18%. El valor presente de estas oportunidades de crecimiento podría ser evaluado como el valor presente de la perpetuidad creciente:

$$VP(OC) = \frac{0.72}{0.15 - 0.108} = 17.14$$

La estrategia de la empresa que consiste en invertir 60% de sus utilidades en proyectos con el rendimiento de 18% tiene el valor presente neto de \$17.14.

Al repetir este procedimiento en términos simbólicos obtendremos una fórmula para el valor presente de las oportunidades de crecimiento.

El valor presente neto al final del primer periodo de un solo proyecto es:

$$-E \cdot b + \frac{E \cdot g}{k} = \frac{-E \cdot b \cdot k + E \cdot b \cdot y}{k} = \frac{E \cdot b \cdot (y - k)}{k}$$

Al dividir este valor entre $(k - y \cdot b)$ obtenemos el valor presente de las oportunidades continuas de crecimiento:

$$VP(OC) = \frac{E \cdot b \cdot (y - k)}{k \cdot (k - y \cdot b)}$$

Obviamente, es la misma fórmula que obtuvimos al restar del valor de la empresa con crecimiento el valor sin crecimiento.

Múltiplo P/E *y las oportunidades de crecimiento*

Al manipular un poco la fórmula del valor (precio) de una empresa con oportunidades de crecimiento, obtenemos una fórmula del múltiplo *P/E* en función del valor sin crecimiento y el valor presente de las oportunidades de crecimiento.

$$P = \frac{E}{k} + VP(OC) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{E} = \frac{1}{k}\left[1 + \frac{VP(OC)}{\left(\frac{E}{k}\right)}\right]$$

Si el valor presente de las oportunidades de crecimiento es cero, el múltiplo es simplemente el recíproco de la tasa de rendimiento, tal como lo hemos establecido anteriormente.

$$VP(OC) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{E} = \frac{1}{k} \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{E}{k}$$

En la medida en que el mercado evalúa las oportunidades de crecimiento de una empresa como positivas y crecientes, el múltiplo *P/E* crece.

$$VP(OC) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{E} > \frac{1}{k}$$

Así, hemos establecido un importante resultado

El múltiplo *P/E* de una empresa con un potencial de crecimiento rentable es mayor que el recíproco de la tasa de capitalización de mercado.

El rendimiento que se deriva de la razón P/E es menor que el rendimiento requerido por el mercado. Esto explica los altos niveles de P/E de algunas empresas del sector de alta tecnología. El punto no es que el mercado acepte bajos rendimientos de esas empresas. Lo que sucede es que los inversionistas reconocen un alto potencial de crecimiento de valor de esas empresas y pagan altos precios para participar en él. Obviamente, es una estrategia de inversión de alto riesgo, dado que el potencial de crecimiento fácilmente puede ser exagerado.

A mayor potencial de crecimiento, mayor valor del múltiplo P/E.

$$VP(OC)\uparrow \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{P}{E}\right)\uparrow$$

Para analizar con mayor detalle los factores que pueden aumentar la razón P/E, despejamos esta relación de la fórmula del valor de una empresa que crece (sustituyendo V por P).

$$P = \frac{E(1-b)}{k - y \cdot b} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{E} = \frac{1-b}{k - y \cdot b}$$

De la fórmula presentada arriba se deduce fácilmente que la razón P/E crece si:

1. Se incrementa el rendimiento de las nuevas inversiones:

$$y\uparrow \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{P}{E}\right)\uparrow$$

2. Aumenta el coeficiente de retención de utilidades, siempre y cuando el rendimiento de la nueva inversión sea mayor que el costo de capital:

$$b\uparrow \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{P}{E}\right)\uparrow \quad \text{si y sólo si} \quad y > k$$

3. Decrece el costo de capital (el rendimiento requerido):

$$k\downarrow \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{P}{E}\right)\uparrow$$

El costo de capital puede reducirse porque baja la tasa libre de riesgo y el riesgo a nivel macroeconómico o de empresa.

Expectativas de inflación más alta aumentan la tasa libre de riesgo y, a través de ésta, el rendimiento requerido. Por eso el resurgimiento de la inflación siempre baja los múltiplos P/E.

El costo de capital crece si aumenta el riesgo percibido. Si el mercado cree que los proyectos emprendidos por la empresa tienen un alto riesgo de fracaso, requerirá un rendimiento más alto.

En resumen, el mercado recompensa con altas P/E a las empresas con buenas oportunidades de inversión (alto y), que actúan agresivamente para aprovecharlas (alto b) y que logran convencer a los mercados de su bajo riesgo (bajo k).

Empresas más riesgosas tienen razones *P/E* más bajas.

El impacto del rendimiento de las nuevas inversiones y de la tasa de retención sobre la razón *P/E*. El costo de capital, $k = 15\%$.

P/E

Rendimiento de las nuevas inversiones, *y*	Tasa de retención de las utilidades, *b*			
	0	0.25	0.50	0.75
12%	6.67	6.25	5.56	4.17
15%	6.67	6.67	6.67	6.67
18%	6.67	7.14	8.33	16.67

En la tabla se ve claramente que la retención de utilidades eleva la razón *P/E* sólo si el rendimiento de las nuevas inversiones es mayor que el costo de capital.

La fórmula de la razón *P/E* también es útil para estimar el *costo de fondos internos* con base en el precio de mercado de la acción.

$$\frac{P}{E} = \frac{1-b}{k_s - y \cdot b} \qquad \Rightarrow \qquad k_s = \frac{1-b}{\left(\frac{P}{E}\right)} + y \cdot b$$

donde k_s es el costo de fondos internos calculado con base en el precio de mercado.

EJEMPLO 3

La empresa del ejemplo 2, después de anunciar el nuevo proyecto de inversión, observa que el precio de sus acciones sube a $50. ¿Cuál es el costo de capital de fondos internos (reinversión de utilidades) de la empresa?

$$P = 50, \qquad E = 6, \qquad y = 18\%, \qquad b = 0.6$$

$$k_s = \frac{1-b}{\left(\frac{P}{E}\right)} + y \cdot b = \frac{1-0.6}{\left(\frac{50}{6}\right)} + 0.18 \cdot (0.6) = 0.156 = 15.6\%$$

Respuesta: Según el juicio del mercado, el costo de fondos internos de la empresa es de 15.6%.

Esto es un poco más que el costo de capital de la empresa antes del anuncio del proyecto de inversión (15%). Posiblemente el mercado cree que la realización del nuevo proyecto aumentará ligeramente el riesgo de la empresa.

Los múltiplos *P/E* varían de un país a otro y de un periodo a otro. En 1999 el múltiplo promedio para todas las empresas estadounidenses fue de 36[6], pero algunas tuvieron *P/E* asombrosamente altos: Microsoft, 58; Cisco, 74; Lucent, 100; America Online, 186; Time Warner, 425; Yahoo, 779; ebay, 1 611.

Para terminar el tema de valuación haremos un ejercicio para encontrar los supuestos detrás de los múltiplos *P*/*E* de 100 y más. Los cálculos serán efectuados en términos reales.

Caso 1

Se supone que la tasa libre de riesgo es de 3.4% y la prima de riesgo del mercado es de 6%. Entonces, para una empresa con beta igual a 1.1, la tasa de capitalización del mercado es de 10%.

$$k = r_F + \beta(r_M - r_F) = 3.4\% + 1.1(6\%) = 10\%$$

Si la empresa reinvierte 60% de sus utilidades, $b = 0.6$, ¿qué tasa de crecimiento de las utilidades y qué rendimiento de las nuevas inversiones son necesarias para justificar una razón $P/E = 100$?

$$\frac{P}{E} = \frac{1-b}{k-g} \quad \Rightarrow \quad 100 = \frac{1-0.6}{0.1-g} \quad \Rightarrow \quad g = 0.096 = 9.6\%$$

Para justificar una razón *P*/*E* de 100, las utilidades netas de la empresa tienen que crecer en el futuro previsible a una tasa de 9.6% anual real.

$$g = b \cdot y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{g}{b} = \frac{0.096}{0.6} = 0.16 = 16\%$$

Para justificar una razón *P*/*E* de 100, el rendimiento neto de los proyectos de inversión de la empresa tiene que ser de 16% en términos reales. No existen muchas empresas que puedan asegurar este tipo de rendimiento neto en periodos prolongados.

Caso 2

Se supone que la tasa libre de riesgo es de 3.4% y la prima de riesgo del mercado es igual a cero.[7] La tasa de capitalización del mercado para una empresa con beta igual a 1.1 es de 3.4%, igual que la tasa libre de riesgo.

$$k = r_F + \beta(r_M - r_F) = 3.4\% + 1.1(0\%) = 3.4\%$$

Con tales supuestos, la tasa real de crecimiento de las utilidades netas que justifica el múltiplo *P*/*E* de 100 es de 3%.

$$100 = \frac{1-0.6}{0.034-g} \quad \Rightarrow \quad g = 0.03 = 3\%$$

El rendimiento de las nuevas inversiones implícito en esta tasa es de 5%.

$$y = \frac{g}{b} = \frac{0.03}{0.6} = 0.05 = 5\%$$

[6] *Business Week*, Global 1 000, 12 de julio de 1999.

[7] En su libro *Dow 36 000*, los autores James K. Glassman y Kevin A. Hassett argumentan que en el largo plazo las inversiones en acciones resultan menos riesgosas que los bonos del gobierno. Según los autores, el mercado está reconociendo este hecho y la prima de riesgo de mercado disminuye. El valor adecuado de la prima de riesgo de mercado es cero.

CONCLUSIONES

1. Si se supone una prima de riesgo igual a cero, los múltiplos *P/E* por arriba de 100 son fáciles de justificar.
2. Si se toma como nivel normal de la prima de riesgo su nivel histórico, los múltiplos *P/E* por arriba de 100 son difíciles de justificar y la mayoría de las empresas que los ostentan están sobrevaluadas.

Si la prima de riesgo de mercado tiende a reducirse o no hasta cero, es objeto de controversia. El autor cree que el mercado debe compensar la gran volatilidad de los rendimientos en las inversiones en acciones, por lo que la prima de riesgo de mercado nunca desaparecerá.

FÓRMULAS DEL CAPÍTULO

$\text{Valor} = \dfrac{\text{Renta}}{\text{Tasa de interés}}$	CAPM: $R_i = R_F + \beta_i (R_M - R_F)$
$V_0 = \dfrac{D_1}{1+k} + \dfrac{D_2}{(1+k)^2} + \dfrac{D_3}{(1+k)^3} + \cdots$	$V_0 = \dfrac{D_1}{k}$
$V_0 = \dfrac{D_1}{k-g}$	$k_s = \dfrac{D_1}{P_0} + g$
$k = \dfrac{1}{\left(\dfrac{P}{E}\right)}$	$V_0 = \underbrace{\left(\dfrac{P}{E}\right)}_{\text{razón histórica}} \times \underbrace{E(EPS)}_{\text{utilidades esperadas}}$
$b = \dfrac{E-D}{E}$	$g = y \cdot b$
$V_0 = \dfrac{E(1-b)}{k - y \cdot b}$	$V_0 = \dfrac{E}{k} + VP(OC)$
$VP(OC) = \dfrac{E \cdot b \cdot (y-k)}{k \cdot (k - y \cdot b)}$	$\dfrac{P}{E} = \dfrac{1}{k}\left[1 + \dfrac{VP(OC)}{\left(\dfrac{E}{k}\right)}\right]$
$\dfrac{P}{E} = \dfrac{1-b}{k-g}$	

Términos clave

Arbitraje
Coeficiente de retención
Costo de capital contable
Depreciación económica
Inversión neta
Ley del precio único
Mercado eficiente
Modelo de dividendos descontados
Modelo de valuación
Modelo de valuación de activos de capital
Oportunidades de crecimiento rentable
Prima de riesgo
Razón precio/utilidad
Rendimiento de nuevas inversiones
Rendimiento del capital contable
Rendimiento requerido
Tasa de capitalización de mercado
Tasa de reinversión
Valor fundamental
Valor intrínseco

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. La renta mensual neta de una casa es de $4 000. La tasa de interés real libre de riesgo es de 5% y la prima de riesgo en el negocio de renta de casas es de 9%. ¿Cuál es el valor teórico de la casa?

   Los siguientes datos sobre la empresa X se refieren a las preguntas 2 a 6.

   $P_0 = \$40$ (precio de mercado de la acción),
   $E(P_1) = \$44$ (precio esperado en un año),
   $E(D_1) = \$3$ (dividendo esperado en una año),
   $R_F = 12\%$ (tasa libre de riesgo),
   $R_M = 16\%$ (rendimiento promedio de activos riesgosos).

2. ¿Cuál es la tasa de capitalización de mercado?
3. Supongamos que usted estaría dispuesto a comprar la acción de la empresa X si su precio fuera de $38. ¿Cuál es su rendimiento requerido para esta empresa?
4. ¿Qué prima de riesgo asigna el mercado a la empresa X? ¿Cuál es la beta de la empresa?
5. ¿Qué prima de riesgo asigna usted a la misma empresa?
6. Si la tasa de capitalización de mercado fuese de 19%, ¿cuál sería el valor intrínseco de la acción de la empresa X?
7. Se espera que la empresa Y pague al final del año un dividendo de $3.5. La empresa opera en una industria madura y se espera que en el futuro sus dividendos se mantengan constantes en términos reales. La tasa libre de riesgo real es de 3%, la beta de la empresa es 0.95 y la prima de riesgo de mercado es de 5% en términos reales. Calcule el valor intrínseco de la empresa.
8. Se espera que la empresa Z pague al final del año un dividendo de $2. La empresa opera en una industria en expansión y se espera que en el futuro sus dividendos crezcan a un ritmo anual de 6% por arriba de la inflación. La beta de la empresa es 1.15. Utilizando los datos faltantes del problema 7, calcule el valor teórico de la empresa.
9. Se espera que la empresa W pague al final del año un dividendo de $2.5 y que los dividendos crezcan a un ritmo de 8% en términos nominales. La tasa libre de riesgo es de 6% y la prima de riesgo aplicable para este tipo de empresas es de 7%. Calcule el valor teórico de la empresa.

10. Para financiar un proyecto de inversión la empresa W del problema 9 emite nuevas acciones y las coloca en el mercado. Las acciones se venden a $45. ¿Cuál es el costo de capital contable de la empresa?
11. Durante los últimos 10 años el precio de acciones de la empresa V era en promedio 14 veces mayor que sus utilidades por acción. Si la utilidad esperada para el fin de este año es de $3.5 por acción, ¿cuál es el valor teórico de la empresa?
12. Una empresa reinvierte 70% de sus utilidades netas en proyectos de inversión cuyo rendimiento esperado es de 18%. ¿Cuál es la tasa de crecimiento de las utilidades de la empresa?
13. Si la tasa de capitalización de mercado de la empresa del problema 12 es igual a 15% y la utilidad esperada para el fin del periodo es de $4 por acción,

    a) ¿cuál es el valor intrínseco de la empresa?

    b) ¿qué parte de ese valor corresponde al valor de la empresa sin crecimiento y qué parte al valor presente de las oportunidades de crecimiento?

14. Calcule la razón *P*/*E* de la empresa del problema 13 sin y con el crecimiento. Comente el resultado.
15. El costo de capital de la empresa es de 16%, su tasa de reinversión de utilidades es de 90% y el rendimiento de sus nuevas inversiones es de 25%. Calcule la razón *P*/*E* de la empresa. Comente el resultado.
16. Vuelva a resolver el problema 15 con la tasa de reinversión de 60%.

CAPÍTULO 9

Anualidades generales y continuas

Objetivos del aprendizaje

Después de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

- Identificar una anualidad general.
- Convertir la anualidad general en una anualidad simple.
- Adecuar la tasa de interés a los datos del problema.
- Resolver la hipoteca canadiense.
- Convertir una anualidad con una frecuencia de pagos en una equivalente con otra frecuencia de pagos.
- Calcular el valor presente del capital humano de una persona y su ingreso permanente.
- Calcular el rendimiento de una hipoteca comprada con descuento.
- Calcular la tasa anual implícita en préstamos con honorarios.
- Determinar el saldo de un fondo con retiros periódicos.
- Transformar anualidades diferidas en anualidades simples.
- Conceptualizar los problemas con el primer pago irregular.
- Saber distinguir entre la capitalización continua y el flujo continuo.
- Resolver los problemas de anualidades continuas.

INTRODUCCIÓN A LAS ANUALIDADES GENERALES

En la gran mayoría de los casos prácticos de anualidades, el periodo de capitalización coincide con el periodo de pago. Son las anualidades simples con las que el lector, después de haber estudiado los capítulos anteriores, ya está familiarizado.

Cuando el periodo de capitalización no coincide con el periodo de pago enfrentamos las *anualidades generales* o complejas. No existen fórmulas para éstas. Para resolverlas es necesario modificarlas de manera que se conviertan en anualidades simples equivalentes. Ya sabemos cómo resolver las anualidades simples mediante fórmulas o utilizando el módulo VDT de la calculadora financiera.

Teóricamente es posible encontrar la *tasa de interés equivalente*, el *pago periódico equivalente*, o el *periodo equivalente*. Casi siempre resulta más cómodo calcular la primera. Es el único enfoque que vamos a desarrollar. Sería recomendable que, antes de continuar, el lector repase los conceptos de las tasas equivalentes.

CONVERSIÓN DE UNA ANUALIDAD GENERAL EN UNA ANUALIDAD SIMPLE

Para transformar una anualidad general en una simple tenemos que encontrar la tasa de interés nominal que, capitalizada el número de veces igual a la frecuencia de pagos, da la misma tasa efectiva que la tasa nominal del problema, capitalizada según la frecuencia indicada. Esta tasa de interés es la tasa equivalente a la del problema y podemos utilizarla en las fórmulas o en la calculadora financiera. La regla que acabamos de mencionar suena bastante complicada. La mejor manera de entenderla es resolviendo algunos problemas concretos. Primero veremos el caso en que el periodo de pago es más largo que el periodo de capitalización.

EJEMPLO 1

Calcule el valor futuro de 40 depósitos quincenales de \$1 000 cada uno en una cuenta que rinde 22% compuesto trimestralmente.

$a = \$1000$, $R = 22\%$ (anual nominal), $m = 4$ (frecuencia de composición), $n = 40$ quincenas

Solución: El carácter general de la anualidad de este problema consiste en que la capitalización es trimestral y las aportaciones a la cuenta son quincenales. Para transformar esta anualidad general en una simple, necesitamos encontrar la tasa anual nominal compuesta quincenalmente, equivalente a la tasa de 22%, compuesta trimestralmente.

Para lograrlo, necesitamos despejar la tasa R de la siguiente ecuación:

$$\left(1+\frac{0.22}{4}\right)^4 = \left(1+\frac{R}{24}\right)^{24} \quad \Rightarrow \quad R = 21.51\%$$

La tasa de interés $R = 21.51\%$ es la tasa nominal, compuesta quincenalmente, equivalente a la tasa de 22%, compuesta trimestralmente. La podemos utilizar en la fórmula del valor futuro de una anualidad simple o en el módulo VDT.

$$VFA = \frac{1\,000}{\left(\frac{0.2151}{24}\right)}\left[\left(1+\frac{0.2151}{24}\right)^{40} - 1\right] = 47\,855.52$$

Respuesta: El valor futuro de los 40 depósitos es $47 855.52.

La calculadora financiera funciona muy bien para solucionar este tipo de problemas. Primero utilizamos el módulo CNVI para calcular la tasa equivalente:

Desde el menú principal pulsamos la tecla FIN, después CNVI y, finalmente, PER. Ingresamos los siguientes datos en el menú:

%NOM	%EFE	P
22	?	4

Al pulsar %EFE obtenemos 23.88%, que es la tasa efectiva si la tasa de 22% se compone trimestralmente.

Ahora buscamos la tasa equivalente. Introducimos 24 en el registro P y al pulsar %NOM obtenemos la respuesta: 21.51%. Es la tasa nominal que, compuesta quincenalmente, produce la misma tasa efectiva que la tasa de 22% compuesta trimestralmente.

Ahora utilizamos esta tasa en el módulo VDT. La secuencia es como sigue:

24 NO.P AÑO, MODO FINAL.

N	%IA	VA	PAGO	VF
40	21.51	0	−1 000	?

Al pulsar la tecla VF obtenemos la respuesta: $47 855.52.

EJEMPLO 2

Al principio de cada mes, usted hace un depósito de $500 en su cuenta de ahorro que rinde 12% compuesto diariamente (con base en 360 días). ¿Cuánto se acumulará en la cuenta al cabo de cinco años?

$a = \$500$, $R = 12\%$ (anual nominal), $m = 360$ (frecuencia de composición), $n = 5$ años $= 60$ meses

Solución: Este es un caso de *anualidad general anticipada*. La capitalización es diaria y el pago es mensual. Antes de usar el módulo valor del dinero en el tiempo (VDT) de la calculadora financiera HP 17BII tenemos que calcular la tasa de interés nominal (equivalente), congruente con los datos del problema. Haremos esto con base en los siguientes puntos:

1. Calcular la tasa efectiva, si la tasa nominal de 12% se compone diariamente.
2. Calcular la tasa nominal, la cual, compuesta mensualmente, produce la tasa efectiva obtenida en el punto 1.
3. Usar esta tasa en el módulo VDT de la calculadora.

Para calcular la tasa efectiva del punto 1, en la calculadora, desde el menú principal pulsamos en este orden: FIN, CNVI, PER.

%NOM	%EFE	P
12	?	360

Al pulsar %EFE obtenemos la respuesta: 12.7474%.

Para contestar al punto 2 tenemos que buscar una tasa que, compuesta mensualmente, nos dé 12.75%. Esto requiere despejar R de la siguiente ecuación:

$$\left(1+\frac{R}{12}\right)^{12} - 1 = 0.1275$$

$$R = \left(1.1275^{1/12} - 1\right)12 = 0.1206 = 12.06\%$$

Con la calculadora, manteniendo el resultado anterior en el registro %EFE, introducimos 12 en P y pulsamos %NOM. El resultado es 12.0582%, que guardamos en STO 0.

La tasa nominal de 12%, compuesta diariamente, produce un rendimiento efectivo de 12.75%. Para producir el mismo rendimiento efectivo, la tasa nominal compuesta mensualmente tiene que ser de 12.06%.

$$R_{nom} = 12\%\Big|_{m=360} \Rightarrow R_{efe} = 12.75\% \Leftarrow R_{nom} = 12.06\%\Big|_{m=12}$$

Otra forma de calcular la tasa equivalente es despejar R de la siguiente ecuación:

$$\left(1+\frac{R}{12}\right)^{1} = \left(1+\frac{0.12}{360}\right)^{360} \quad \Rightarrow \quad R = 0.1206 = 12.06\%$$

Ahora ya podemos resolver el problema con el módulo VDT. Pulsamos EXIT dos veces y después VDT. Seleccionamos la tecla OTRO para fijar el número de pagos en 12 y el modo en inicial (12 NO.P AÑO MODO INIC). Pulsamos EXIT y la flecha ← (hacia la izquierda) para borrar la información sobre el modo. Recuperamos nuestra tasa equivalente 12.0582 con RCL 0 y pulsamos %IA, para introducir esta tasa en la calculadora. Además, en N introducimos 60, 0 en VA, 500 en PAGO. Ahora, al apretar VF, obtenemos la respuesta buscada $41 309.51.

Respuesta: Después de cinco años, el saldo en nuestra cuenta de ahorro será de $41 309.51.

EJEMPLO 3

¿Cuál es el valor futuro de cuatro pagos trimestrales de $1 000, si la tasa de interés anual de 24% se compone mensualmente?

$$a = \$1\,000, \quad R = 24\% \text{ (anual nominal)}, \quad m = 12, \quad n = 4 \text{ trimestres}$$

Solución: Si la tasa nominal de 24% se compone mensualmente, la tasa efectiva es 26.82%. La tasa nominal compuesta trimestralmente que corresponde a la tasa anual efectiva de 26.82% es 24.48%. Es la tasa equivalente buscada.

$$\left(1+\frac{0.24}{12}\right)^{12} = \left(1+\frac{R}{4}\right)^{4} \quad \Rightarrow \quad R = 24.48\%$$

Utilizamos esta tasa en el módulo VDT: 4 NO.P AÑO, MODO FINAL.

N	%IA	VA	PAGO	VF
4	21.51	0	–1 000	?

Al pulsar la tecla VF obtenemos la respuesta: $4 382.46.

Respuesta: Después de cuatro pagos de $1 000, el saldo de la cuenta será de $4 382.46.

EJEMPLO 4

¿Cuál es el valor futuro de 20 depósitos mensuales de $500, si la tasa de interés anual de 20% se compone semestralmente?

$$a = \$500, \quad R = 20\% \text{ (anual nominal)}, \quad m = 2, \quad n = 20 \text{ meses}$$

Solución: Si la tasa nominal de 20% se compone semestralmente, la tasa efectiva es de 21%. La tasa nominal compuesta mensualmente que corresponde a la tasa anual efectiva de 21% es 19.21%. Es la tasa equivalente buscada.

$$R_{nom} = 20\%\Big|_{m=2} \;\Rightarrow\; R_{efe} = 21\% \;\Leftarrow\; R_{nom} = 19.21\%\Big|_{m=12}$$

Utilizamos esta tasa en el módulo VDT de la calculadora de la siguiente manera:

12 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 20, %IA = 19.21, VA = 0, PAGO = −500.

Al pulsar la tecla VF obtenemos la respuesta: $11 677.74.

Respuesta: Después de 20 pagos de $500, el saldo de la cuenta será de $11 677.74.

Suponemos que, en el nuevo sistema de pensiones (SAR) que entró en vigor en julio de 1997, el patrón hará un depósito en la cuenta individual de cada trabajador equivalente a 11.5% de su salario. Los salarios se cobran quincenalmente; sin embargo, la aportación a la cuenta individual es bimestral. Muchos se preocupan de que la menor frecuencia de pagos reduzca el monto efectivo de cada aportación. En el siguiente problema mostraremos que aun cuando la preocupación es válida, el problema no es muy grave.

EJEMPLO 5

El salario de un trabajador es tal que la aportación quincenal a su fondo de retiro es de $700; sin embargo, la aportación se hace cada dos meses. ¿Qué cantidad quincenal sería equivalente a una aportación bimestral de $2 800, si la cuenta del SAR rinde 10% compuesto mensualmente?

$a = \$700, \quad R = 10\%$ (anual nominal), $\quad m = 24, \quad n = 1$ año

Solución: Como periodo de comparación seleccionamos un año (24 quincenas, 6 bimestres). Primero calculamos el valor futuro de seis pagos bimestrales, si la tasa nominal de 10% se compone mensualmente.

Si la tasa nominal de 10% se compone mensualmente, la tasa efectiva es de 10.47%. La tasa nominal compuesta bimestralmente que corresponde a la tasa anual efectiva de 10.47% es de 10.04%.

Utilizamos esta tasa en el módulo VDT de la calculadora para determinar el valor futuro de los seis pagos bimestrales:

6 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 6, %IA = 10.04, VA = 0, PAGO = − 2 800

Al pulsar la tecla VF obtenemos la respuesta: $17 518.8.

Para calcular el pago quincenal que producirá el mismo valor futuro, tenemos que calcular la tasa nominal compuesta quincenalmente que es equivalente a la tasa de 10% compuesta mensualmente. Esta tasa es igual a 9.98%. Ahora ya podemos calcular el pago quincenal equivalente al pago bimestral de $2 800. En el módulo VDT introducimos los siguientes valores:

24 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 24, %IA = 9.98, VA = 0, VF = 17 518.8

Al pulsar la tecla PAGO, obtenemos la respuesta: 695.65.

Ahora podemos calcular el valor futuro de los 24 pagos bimestrales de $700:

24 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 6, %IA = 9.98, VA = 0, PAGO = − 700.

Al pulsar la tecla VF, obtenemos la respuesta: 17 628.37.

La pérdida anual del trabajador es 17 628.37 − 17 518.8 = 109.57.

Respuesta: El hecho de que las aportaciones al SAR sean bimestrales en vez de quincenales hace que la aportación de $700 quincenal valga en realidad sólo $695.65 (una reducción de 0.62%). En el periodo de un año el trabajador pierde $109.57.

La tasa de interés en anualidades generales

Cuando la frecuencia de pagos no coincide con la frecuencia de capitalización y la variable incógnita es la tasa de interés, el procedimiento es el siguiente:

1. Calcule primero %IA en el menú VDT. Esta es la tasa nominal que corresponde a la frecuencia de capitalización del problema.
2. En el menú CNVI convierta esta tasa a una tasa efectiva que corresponda a la frecuencia de capitalización del problema.
3. Convierta la tasa efectiva a la tasa nominal basada en la frecuencia de capitalización del banco.

EJEMPLO 6

¿A qué tasa efectiva anual tienen que hacerse 20 depósitos bimestrales de $1 000 para que después de hacer el último depósito el saldo de la cuenta sea de $30 000?

a = $1 000, m = 6, n = 20 bimestres, VF = $30 000, R = ? (anual efectiva)

Solución: Primero calculamos el **%**IA en el menú VDT.

6 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 20, VF = 30 000, PAGO = −1 000

Al pulsar la tecla **%**IA obtenemos la respuesta: 24.43, que es la tasa nominal que corresponde a la frecuencia de capitalización bimestral.

Segundo, si la tasa nominal de 24.43% se compone bimestralmente, la tasa anual efectiva es de 27.05%.

Tercero, si la frecuencia de capitalización del banco fuese 12 (mensual), la tasa nominal requerida sería 24.18%.

Respuesta: La tasa anual efectiva es de 27.05%.

EJEMPLO 7

Se hace un depósito de $50 000 que permite hacer 24 retiros de $2 700 al final de cada uno de los siguientes 24 meses. ¿Qué tasa anual nominal capitalizable diariamente gana el depósito?

a = $2 700, m = 12, n = 24 meses, R = ?

Solución: Primero calculamos el **%**IA en el menú VDT.

12 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 24, VA = − 50 000, PAGO = 2 700

Al pulsar la tecla **%**IA obtenemos la respuesta: 26.25%, que es la tasa nominal que corresponde a la frecuencia de capitalización mensual.

Segundo, si la tasa nominal de 26.25% se compone mensualmente, la tasa anual efectiva es de 29.65%.

Tercero, si el banco utiliza la capitalización diaria (con base en 365), la tasa nominal requerida es 25.97%.

Respuesta: El depósito gana una tasa nominal de 25.97%, capitalizable diariamente.

En el caso de las *hipotecas canadienses*, el interés se capitaliza en forma semestral, mientras que los pagos se efectúan mensualmente. Para calcular el pago mensual en una hipoteca canadiense es necesario calcular la tasa nominal equivalente que puede ser usada en la fórmula de anualidad o en el menú **VDT** de la calculadora financiera.

EJEMPLO 8

¿Cuál es el pago mensual necesario para amortizar una hipoteca canadiense de $300 000 a 30 años, si la tasa de interés es de 12%?

$$n = 30 \text{ años} = 360 \text{ meses}, \quad R = 12\%, \quad VA = 300\,000, \quad a = ?$$

Solución: Si la tasa nominal de 12% se compone semestralmente, la tasa efectiva es de 12.36%. La tasa nominal compuesta mensualmente que corresponde a la tasa anual efectiva de 12.36% es de 11.71%. Utilizamos esta tasa en el módulo VDT como sigue:

12 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 360, **%**IA = 11.71, VA = 300 000.

Al pulsar la tecla PAGO obtenemos la respuesta: −3 019.16.

Respuesta: El pago mensual de la hipoteca canadiense es de $3 019.16.

ANUALIDADES EQUIVALENTES

Las anualidades son equivalentes si, dada la tasa de interés, representan el mismo valor presente (o futuro). El concepto de equivalencia nos permite transformar una anualidad con una periodicidad de pagos en otra anualidad equivalente con diferente periodicidad de pagos. Una aplicación más compleja del concepto de anualidades equivalentes permite transformar una anualidad a un plazo en otra a un plazo distinto.

EJEMPLO 1

Transformar una anualidad de cuatro pagos semestrales de $500 000 en 24 pagos mensuales equivalentes si la tasa de interés es de 18%

Solución: Primero calculamos el valor presente de cuatro pagos semestrales de $500 000. La capitalización se refiere a la frecuencia de pagos de la anualidad original. Al utilizar la calculadora financiera, tenemos:

2 P.AÑ, MODO FINAL, **CLEAR DATA**

N	%IA	VA	PAGO	VF
4	18	0	−50 000	0

Al pulsar la tecla VA, obtenemos la respuesta: 1 619 859.94.

Ahora necesitamos distribuir esta cantidad en 24 pagos mensuales. Antes de poder hacer esto necesitamos encontrar la tasa nominal compuesta mensualmente equivalente a la tasa de 18% compuesta semestralmente.

Entramos en el módulo CNVI de la calculadora financiera: FIN → CNVI → PER, e ingresamos los datos del problema en los registros correspondientes.

%NOM	%EFE	P
18	18.81	2

Ahora introducimos 12 en P y al pulsar la tecla %NOM obtenemos 17.36% que es la tasa equivalente buscada.

Al mantener el mismo valor presente, cambiamos el plazo y la tasa de interés: 12 P.AÑ, MODO FINAL.

N	%IA	VA	PAGO	VF
24	17.36	1 619 859.94	?	0

Al pulsar la tecla PAGO, obtenemos la respuesta: 80 369.95.

Veinticuatro pagos mensuales de $80 369.95 cada uno son equivalentes a cuatro pagos semestreles de $500 000. Si multiplicamos 24 por 80 369.95 obtenemos 1 928 878.95, un poco menos que $4 \times 500\,000 = 2\,000\,000$. Esto se debe al valor del dinero en el tiempo. Con pagos mensuales el acreedor recibe los pagos en promedio antes que con los pagos semestrales.

En el ejemplo 5 de la sección anterior hemos calculado que 24 pagos quincenales de $691.34 son equivalentes a seis pagos de $2 800. Ahora vamos a generalizar la metodología que se utiliza para sustituir unos pagos frecuentes con otros pagos equivalentes menos frecuentes, o viceversa. Los pagos equivalentes se calculan con base en algún valor común, generalmente el valor futuro o el valor presente. Como periodo de comparación se toma, por lo común, un año.

EJEMPLO 2

¿Qué pago semestral puede sustituir pagos mensuales de $1 200 si la tasa de 15% se compone mensualmente? $a = \$1\,200$, $m = 12$, $R = 15\%$.

Solución: Si hacemos los cálculos a mano, resulta más conveniente tomar como periodo de comparación un semestre. Un pago semestral que sustituye a seis pagos mensuales es simplemente el valor futuro de seis pagos mensuales, si la tasa de 15% se compone mensualmente.

$$VFA = \frac{1200}{\left(\frac{0.15}{12}\right)}\left[\left(1+\frac{0.15}{12}\right)^{6}-1\right] = 7428.78$$

Respuesta: Un pago semestral de $7 428.78 sustituye a seis pagos mensuales de $1 200.

Si utilizamos la calculadora financiera, para no confundirnos, resulta más conveniente tomar como periodo de comparación un año. Primero calculamos el valor futuro de 12 pagos de $1 200, con la tasa de 15%, compuesta mensualmente:

12 NO.P AÑO, MODO FINAL

N	%IA	VA	PAGO	VF
12	15	0	−1 200	?

Al pulsar la tecla VF obtenemos la respuesta: $15 432.43.

Ahora necesitamos calcular la tasa nominal, compuesta semestralmente, equivalente a la tasa anual de 15%, compuesta mensualmente:

FIN, CNVI, PER, %NOM = 15, P = 12. Al pulsar %EFE obtenemos: 16.0755. Ahora ponemos P = 2, y al pulsar la tecla %NOM obtenemos 15.4766%, que es la tasa equivalente buscada. Utilizamos esta tasa en el módulo VDT:

2 NO.P AÑO, MODO FINAL

N	%IA	VA	PAGO	VF
2	15.48	0	?	15 432.43

Al pulsar la tecla PAGO obtenemos la respuesta: $7 428.78.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Reemplazar una anualidad de $100 000 anuales con una anualidad con pagos mensuales, si la tasa de interés es de 17.5%.

Respuesta: a = 7 731.27.

Consumo a lo largo del ciclo de vida

El valor presente de todos los ingresos futuros de un individuo a precios actuales se llama *capital humano.*

El *ingreso permanente* es el nivel constante del gasto mensual (o anual) en consumo que tiene el valor presente igual al capital humano del individuo.

La suma de los activos de retiro y el capital humano se llama *riqueza total* del individuo. Explicaremos estos importantes conceptos en un ejemplo.

EJEMPLO 3

El señor Pérez tiene 35 años y gana $20 000 mensuales. Espera que su salario se mantenga constante en términos reales el resto de su vida profesional.[1] Planea trabajar 30 años más y después del retiro, a sus 65 años, vivir otros 15 años. Dado que no tiene activos de retiro ni está cubierto por ningún plan de jubilación, ¿qué porcentaje de su ingreso debe ahorrar el señor Pérez para mantener el consumo constante el resto de su vida? Se supone que el rendimiento promedio en términos reales de sus inversiones es de 4% anual.

Solución: Ingresamos los datos del problema en la calculadora:

12 P.AÑ**,** MODO FINAL**,** CLEAR DATA

N	%IA	VA	PAGO	VF
360	4	?	20 000	0

Al oprimir la tecla VA obtenemos el valor del capital humano del señor Pérez: $4 189 224.81.

Ahora necesitamos distribuir este valor presente a lo largo de 45 años (540 meses). Mantenemos el mismo valor presente y sólo cambiamos el plazo:

N	%IA	VA	PAGO	VF
540	4	4 189 224.81	?	0

Al pulsar la tecla PAGO obtenemos el valor del ingreso permanente del señor Pérez: $16 739.38, es decir, 83.7% de su ingreso.

¿Cómo interpretar este resultado?

Si el señor Pérez gasta $16 739.38 mensuales durante los 30 años de su vida profesional, los ahorros acumulados serán suficientes para proporcionarle, con los intereses, un ingreso mensual de la misma cantidad durante los 15 años de jubilación.

Respuesta: Para mantener el mismo nivel de gasto (ingreso permanente) durante 45 años, el señor Pérez debe ahorrar, mientras trabaja, 16.3% de su ingreso.

A continuación presentamos una fórmula para el ingreso permanente, como el porcentaje del ingreso corriente.

$$\frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^N}\right]=\frac{c}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^{N+J}}\right]$$

[1] Este supuesto implica que los incrementos salariales en términos nominales apenas compensarán el incremento del costo de vida.

donde r es la tasa de interés real por periodo (mensual o anual),
N es el número de periodos durante los que se recibe el ingreso corriente,
c es el ingreso permanente por cada peso del ingreso corriente,
J es el número de periodos durante los que se planea recibir la pensión.
$(N + J)$ es el número total de periodos, desde hoy hasta el último pago que se recibe por concepto de jubilación.

¿Cómo cambiaría la situación del señor Pérez si en este momento ya tuviera acumulado algún fondo de retiro?

EJEMPLO 4

Supongamos que el señor Pérez del ejemplo 3 tiene en su fondo de pensiones $850 000. Calcule su riqueza total y su ingreso permanente.

Solución: Activos de retiro + capital humano = riqueza total.

$$850\,000 + 4\,189\,224.81 = 5\,039\,224.81$$

Al utilizar la metodología del ejemplo 3, tenemos:

N	%IA	VA	PAGO	VF
540	4	5 039 224.81	?	0

Al oprimir la tecla PAGO, obtenemos el valor del ingreso permanente: 20 135.82.

Respuesta: La riqueza total del señor Pérez es igual a $5 039 224.81. Su ingreso permanente es de $20 135.82 mensual.

¿Qué significa que el ingreso permanente sea mayor que el ingreso corriente?

Significa que, dada la tasa de interés real, el fondo de retiro del individuo, ya en ese momento, es más que suficiente para asegurar un retiro con la pensión igual a su ingreso actual. Concretamente, el valor futuro en 30 años del fondo de retiro del señor Pérez es de $2 816 473.31. Mientras tanto, el valor presente de 180 mensualidades de $20 000 es de $2 703 842.97, que es la cantidad que asegura 15 años de ingreso mensual de $20 000. En otras palabras, el señor Pérez en ese momento ya tiene más de lo necesario para jubilarse en 30 años. El excedente lo puede dedicar a aumentar su consumo permanente en $135.82 mensuales durante 30 años. No sólo no necesita ahorrar, sino incluso puede gastar ligeramente más de lo que gana. Es la recompensa por haber ahorrado en el pasado, o por haber heredado una fortuna.

TEMAS ESPECIALES

En esta sección estudiaremos algunos casos prácticos que profundizarán nuestro conocimiento de las anualidades y mejorarán nuestra capacidad de resolver problemas relacionados con el valor del dinero en el tiempo.

Rendimiento de una hipoteca comprada con descuento

EJEMPLO 1

Un inversionista desea comprar una hipoteca de $100000 emitida a 25 años con un interés de 14%. La hipoteca se emitió hace tres años (36 pagos efectuados). El préstamo debe pagarse completamente con un pago de liquidación al final del quinto año. ¿Cuál es el rendimiento de la inversión en la hipoteca, si el precio de compra es de $85000?

n = 25 años = 300 meses, R = 14% VA = 100 000

Solución: Primero calculamos el pago mensual implícito en los datos del problema:

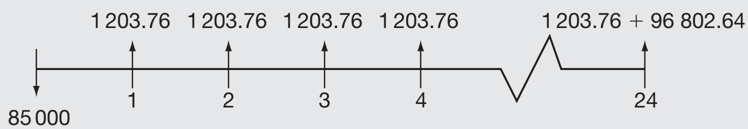
12 NO.P AÑO, MODO FINAL

N	%IA	VA	PAGO	VF
300	14	100 000	?	0

donde PAGO = − 1 203.76.

Comprar una hipoteca significa comprar el derecho a los pagos mensuales que producirá la hipoteca hasta su vencimiento. En el problema 1 esto significaría el derecho a (25 − 3) × 12 = 264 pagos de $1 203.76 cada uno. Sin embargo, el problema especifica que la hipoteca será liquidada con un pago único al final del quinto año de su vida, es decir, 24 meses después de su compra por el inversionista.

Lo que compró el inversionista por $85000 es el derecho a 24 pagos de 1203.76 cada uno y un pago de liquidación de 96802.64 al final del mes 24. La línea de tiempo de la inversión en hipoteca permite visualizar el problema con toda claridad:



Podemos calcular el pago de liquidación como el saldo insoluto de la deuda después de cinco años:

12 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 60, %IA = 14, VA = 100 000, PAGO = − 1203.76

Al pulsar la tecla VF obtenemos el saldo buscado: VF = −96802.64. Es lo que el deudor sigue debiendo y lo que tiene que pagar para saldar su deuda.

Una manera alternativa de calcular el monto del pago de liquidación es hallar el valor presente de los 240 pagos restantes:

12 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 240, %IA = 14, PAGO = − 1203.76, VF = 0

Al pulsar la tecla VA obtenemos el saldo buscado: VA = − 96802.64.

Para calcular el rendimiento de la hipoteca tenemos que introducir en el módulo VDT los datos indicados en la línea de tiempo:

N = 24, VA = − 85 000, PAGO = 1 203.76, VF = 96 802.64,

donde %IA = 22.55%.

Respuesta: El rendimiento de la inversión en hipoteca es de 22.55%.

El rendimiento de la inversión en la hipoteca es mayor que la tasa de interés pactada porque, después de 36 meses de pago, el saldo de la hipoteca es de $98 352.16, mientras que el inversionista pagó tan sólo $85 000 por ella. En una situación así se dice que la hipoteca fue comprada con descuento. La inversión en la hipoteca es análoga a una inversión en un bono a dos años con el valor de redención de $96 802.64 y 24 cupones mensuales de $1 203.76, comprado por $85 000.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Un inversionista compra una hipoteca emitida hace 10 años a 20 años a 12.5%, con el valor original de $450 000. ¿Cuál es el rendimiento de la inversión en hipoteca si el inversionista la compró por $285 000?

Respuesta: 17.8765%.

Tasa de porcentaje anual de un préstamo con honorarios

En algunos casos, antes de entregar el crédito hipotecario, el banco descuenta un honorario del monto del préstamo. Este descuento hace que el valor presente del préstamo se reduzca, mientras que los pagos mensuales siguen siendo los mismos. La *tasa de porcentaje anual* (TPA) es la tasa de interés efectiva más alta que la tasa nominal especificada en el contrato. Para encontrar esta tasa seguimos un procedimiento de dos pasos:

1. Calcular el pago mensual con base en el valor original (no descontado) del préstamo.
2. Sustituir el monto original por el monto descontado y calcular la tasa de descuento compatible con el pago mensual calculado en el punto 1.

EJEMPLO 2

Supongamos que un cliente le pide al banco un crédito hipotecario de $200 000 por 25 años, a una tasa de interés de 15%. El banco le cobra al cliente dos puntos por la emisión de la hipoteca (un punto es 1% del valor nominal del préstamo). ¿Cuál es la tasa de porcentaje anual (TPA) implícita en este contrato?

n = 25 años = 300 meses, R = 15%, VA = 200 000

Solución: primero calculamos el pago mensual:

12 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 300, %IA = 15, VA = 200 000

La respuesta es: PAGO = −2 561.66.

2. Ahora cambiamos el valor presente a 200 000 − 2% = 196 000, que es la cantidad que efectivamente recibe el cliente. Manteniendo todos los demás datos sin cambio pulsamos la tecla **%**IA, para obtener la respuesta:**%**IA = 15.34.

Respuesta: Al tomar en cuenta el honorario por la apertura del crédito, el cliente paga una tasa de interés (TPA) de 15.34%.

Préstamo desde el punto de vista del prestamista

EJEMPLO 3

Supongamos que un préstamo de $1 000 a cinco años con un interés de 18% tiene un honorario inicial de cuatro puntos. Los pagos mensuales cubren tan sólo el interés del principal nominal. ¿Cuál es el rendimiento para el prestamista?

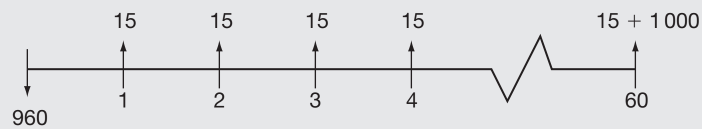
$$n = 5 \text{ años} = 60 \text{ meses}, \qquad R = 18\%, \qquad \text{VA} = -1\,000, \qquad \text{VF} = 1\,000$$

Solución:

1. Calculamos el pago mensual:

$$\text{PAGO} = 1\,000(0.18)/12 = 15.$$

Dibujamos el diagrama de flujos de efectivo para observar el problema:



1. Calculamos el valor presente efectivo: VA = 1 000 − 4% = 960, que es la cantidad que efectivamente recibe el prestatario.

Ya tenemos los datos necesarios para poder utilizar el módulo de VDT:

12 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 60, VA = − 960, PAGO = 15, VF = 1 000

Pulsamos la tecla **%**IA para obtener la respuesta: 19.25.

Respuesta: Al tomar en cuenta el honorario, el rendimiento efectivo para el prestamista (TPA) es de 19.25%.

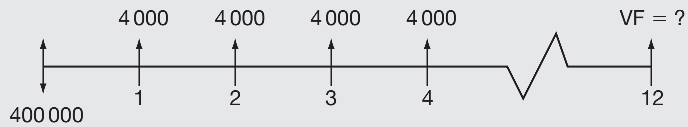
Valor de un fondo con retiros periódicos

EJEMPLO 4

¿Cuál será el saldo de un fondo de $400000, después de uno, cinco y 10 años, si el fondo rinde 15% anual compuesto trimestralmente y al comienzo de cada mes se hace un retiro de $4 000?

$$R = 15\%, \qquad \text{VA} = -\,400\,000, \qquad \text{PAGO} = 4\,000, \qquad \text{VF} = ?$$

Solución: Para el periodo de un año el diagrama de flujos de efectivo es el siguiente:



Dado que la frecuencia de capitalización no coincide con la frecuencia de los retiros, primero tenemos que calcular la tasa de interés equivalente. Si la tasa nominal de 15% se compone trimestralmente, la tasa efectiva es de 15.865%. La tasa nominal compuesta mensualmente que corresponde a la tasa anual efectiva de 15.865% es de 14.816%. Utilizamos esta tasa en el módulo VDT:

12 NO.P AÑO, MODO INIC

N	%IA	VA	PAGO	VF
12	14.82	−400 000	4 000	?

Al pulsar la tecla del menú VF obtenemos la respuesta: 412 062.62.

Para N = 60, VF = 482 735.16

Para N = 120, VF = 655 498.75

Dado que los retiros mensuales son menores que los intereses mensuales que genera el fondo (4 000 < 4 938.77), éste está creciendo a pesar de los retiros.

Respuesta: Después de un año el fondo tiene $412 062.62, después de cinco años: $482 735.16, después de 10 años: $655 498.75.

Depósitos necesarios para la educación de un hijo

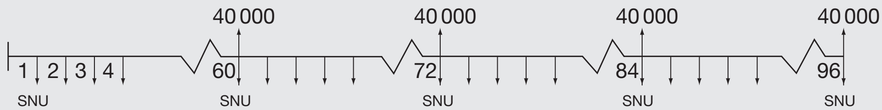
Una buena aplicación del módulo de flujo de caja (F.CAJ) de la calculadora financiera HP 17BII, que al mismo tiempo nos permite consolidar la comprensión del concepto SNU (serie neta uniforme), es la planeación del ahorro para financiar los estudios de un hijo. Dado que hablamos de un futuro relativamente lejano, es necesario efectuar los cálculos en Udis, para eliminar el impacto de la inflación. Suponemos que es posible pronosticar los gastos de educación en Udis, con base en el conocimiento de este tipo de gastos en el presente.

EJEMPLO 5

Su hijo asistirá a una universidad particular dentro de cinco años y usted planea iniciar un fondo para su educación. Los gastos (colegiatura, seguro y útiles escolares) serán de 40 000 Udis al año. Será necesario retirar esta cantidad al principio de cada uno de los cuatro años de su educación. El fondo en Udis genera rendimiento de 6% anual, compuesto mensualmente. ¿Cuánto dinero deberá depositar cada mes (empezando al final del mes en curso) para poder enfrentar los gastos de educación de su hijo?

Solución: El problema implica un periodo de ocho años, es decir, de 96 meses. Habrá cuatro retiros de 40 000 al principio de los periodos 60, 72, 84 y 96.

Utilizaremos el módulo F.CAJ para calcular la serie neta uniforme (SNU) que es equivalente a cuatro retiros necesarios. La SNU que encontraremos será igual a la cantidad a depositar en el fondo cada mes. Los únicos flujos de caja que registraremos en la calculadora son los cuatro retiros de 40 000 Udis cada uno. En los demás periodos los flujos de caja serán iguales a cero. Como tasa de interés utilizaremos la tasa mensual 6%/12 = 0.5%. Antes de empezar el cálculo conviene observar el problema en la línea de tiempo. Los cuatro retiros están por arriba de dicha línea, mientras que las 96 flechas dirigidas hacia abajo, que representan los depósitos (SNU), tienen el signo negativo, ya que representan las salidas de efectivo.



Del menú principal de la calculadora seleccionamos el submenú FIN y luego F.CAJ. Pulsamos la tecla CLEAR DATA y contestamos SÍ a la pregunta sin borrar la lista anterior. A continuación viene el listado acerca de cómo llenar la lista, junto con los comentarios explicativos. Para introducir un número en la lista tecleamos este número y después pulsamos la tecla INPUT.

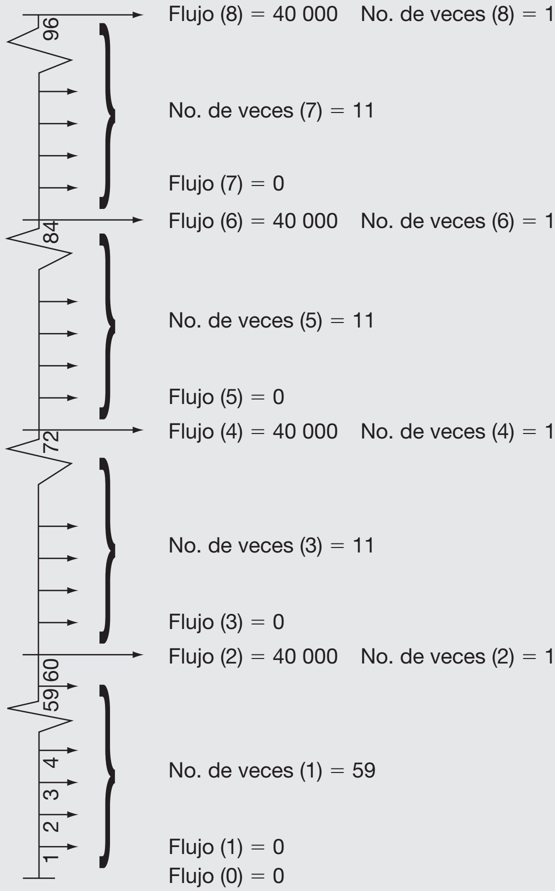
F.CAJ (0) = 0	Fija el flujo inicial en cero
F.CAJ (1) = 0	
NO. DE VECES (1) = 59	No habrá ningún retiro hasta el mes 60
F.CAJ (2) = 40 000	El primer retiro de 40 000 Udis
NO. DE VECES (2) = 1	Es el único retiro en el año
F.CAJ (3) = 0	
NO. DE VECES (3) = 11	No habrá ningún retiro hasta el siguiente año
F.CAJ (4) = 40 000	El retiro del segundo año
NO. DE VECES (4) = 1	
F.CAJ (5) = 0	
NO. DE VECES (5) = 11	
F.CAJ (6) = 40 000	El retiro del tercer año
NO. DE VECES (6) = 1	
F.CAJ (7) = 0	
NO. DE VECES (1) = 11	
F.CAJ (8) = 40 000	El último retiro
NO. DE VECES (8) = 1	
F.CAJ (9) = ?	Ya terminó nuestra lista y pulsamos la tecla EXIT.

En el nuevo menú pulsamos la tecla CALC y esperamos unos segundos. En el nuevo menú introducimos la tasa de interés 0.5% pulsando la etiqueta **I%**.

Ahora tenemos la solución del problema:

VAN = 108 677.33, SNU = 1 428.17, VFN = 175 420.72.

La línea de tiempo en forma vertical puede ser más intuitiva.



La SNU = 1 428.17 es el pago mensual equivalente a los cuatro retiros anuales, es decir, la cantidad que hay que depositar al final de cada mes durante los siguientes 96 meses para poder hacer los retiros necesarios para sufragar los costos de educación de su hijo.

Es fácil comprobar en el menú VDT que el valor presente neto de una anualidad de 96 pagos de 1 428.17 cada uno, con una tasa de interés de 6% anual, es igual a 108 677.33 y el valor futuro es de 175 420.72, tal como en el módulo F.CAJ. Sin embargo, si no tenemos confianza en nuestro cálculo, podemos computar el valor presente de cuatro retiros de 40 000 en los meses 60, 72, 84 y 96. Como tasa de descuento tomamos la tasa mensual de 0.5%.

$$VPN = \frac{40\,000}{\left(1.005\right)^{60}} + \frac{40\,000}{\left(1.005\right)^{72}} + \frac{40\,000}{\left(1.005\right)^{84}} + \frac{40\,000}{\left(1.005\right)^{96}} = 108\,677.33$$

El resultado es el mismo que el obtenido con la calculadora.

Se puede hacer otra comprobación calculando a mano el valor futuro de los cuatro retiros.

$$VFN = 40\,000(1.005)^{36} + 40\,000(1.005)^{24} + 40\,000(1.005)^{12} + 40\,000 = 175\,420.72$$

Como era de esperarse, este resultado también concuerda con el que obtuvimos en el módulo F.CAJ.

La comprobación de los resultados presentada arriba sugiere un método alternativo para resolver el problema con el módulo VDT.

1. Calculamos el valor de los cuatro retiros de 40 000 Udis en el mes 96, cuando terminan los estudios: 1 NO.P AÑO, MODO INIC, N = 4, %IA = 6.1678, VA = 0, PAGO = 40 000, VF = 175 420.72.
2. Calculamos el pago mensual (durante 96 meses) que produce el mismo valor futuro: 12 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 96, %IA = 6, VA = 0, VF = 175 420.72.

Al pulsar la tecla del menú PAGO obtenemos el resultado: 1 428.17, que es igual al SNU que obtuvimos con el módulo F.CAJ.

En los dos primeros pasos utilizamos la tasa de interés, 6.1678%, que es la tasa efectiva si la tasa nominal de 6% se compone mensualmente.

Respuesta: Para poder financiar los gastos de educación de su hijo es necesario hacer un depósito de 1 428.17 Udis al final de cada mes, durante 96 meses.

Anualidades diferidas

En algunas circunstancias el primer pago se produce después de haber transcurrido cierto tiempo desde la contratación de la deuda. Este tipo de anualidades se llaman *anualidades diferidas* y el tiempo que transcurre entre la fecha inicial y la fecha del primer pago se llama *intervalo de aplazamiento*.

Las fórmulas para las anualidades, igual que el menú VDT de la calculadora, se basan en el supuesto de que cada periodo de pago tenga la misma duración. El primer pago se efectúa al final o al principio del primer periodo. Sin embargo, en algunas situaciones el periodo del primer pago puede ser más largo (o más corto) que los demás pagos. En tales casos resulta necesario ajustar los datos del problema, para que sirva a la solución general.

EJEMPLO 6

Un préstamo por $45 000 a 36 meses paga una tasa de interés anual de 15%. El primer pago se realiza a los 46 días. ¿Cuál es el monto del pago mensual?

N = 36 meses, $R = 15\%$, VA = 45 000, $a = ?$

Solución: Si no recibiéramos el préstamo hoy, sino en 16 días, sería un caso común de anualidad ordinaria. Lo que hay que hacer, entonces, es calcular el valor del préstamo en 16 días:

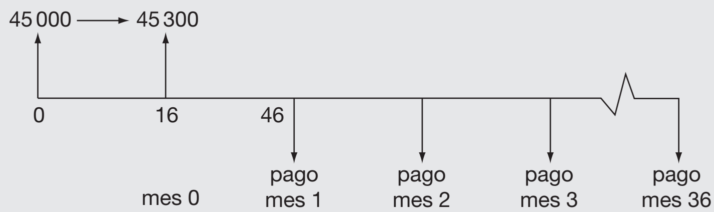
$$VP_{16} = VP_0\left(1+\frac{R}{12}\right)^{\text{no. de meses}} = 45\,000\left(1+\frac{0.15}{12}\right)^{16/30} = 45\,000(1.0125)^{0.533} = 45\,299.13$$

Ahora podemos usar este valor como el VA en el menú VDT:

12 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 36, %IA = 15, VA = 45 299.13, VF = 0.

Al pulsar la etiqueta PAGO obtenemos el resultado: −1 570.3.

El proceso de solución presentado arriba puede verse en la línea de tiempo.



Respuesta: Para amortizar el préstamo en 36 meses, el pago mensual será de $1 570.3, con tal de que el primer pago se haga en 46 días.

EJEMPLO 7

Para pagar un préstamo de $1 000 es necesario realizar 24 pagos mensuales de $40 y un pago de liquidación de $300 al final del mes 24. Los pagos empiezan ocho días después de recibir el préstamo. ¿Cuál es la tasa de interés implícita en este contrato?

N = 24 meses, VA = 1 000, PAGO = 40, VF = 300, R = ?

Solución: Si no recibiéramos el préstamo hoy sino en ocho días este problema sería fácil de resolver con el módulo **VDT**. Sin embargo, para calcular el valor del préstamo en ocho días necesitamos saber cuál es la tasa de interés y esto es lo que hay que calcular. Sería un poco difícil encontrar una respuesta exacta a este problema, pero fácilmente podemos encontrar una aproximada.

Ocho días es un periodo muy corto en comparación con la longitud del préstamo (720 días). Por eso calcularemos la tasa de interés para una anualidad anticipada con un valor final, ignorando que el primer periodo es irregular:

12 NO.P AÑO, MODO INIC, N = 24, VA = 1 000, PAGO = − 40, VF = − 300.

Al pulsar la tecla **%**IA obtenemos la respuesta, **%**IA = 20.07%.

Esta tasa de interés es un poco más alta que la verdadera, pero es suficientemente exacta para calcular el valor del préstamo en ocho días:

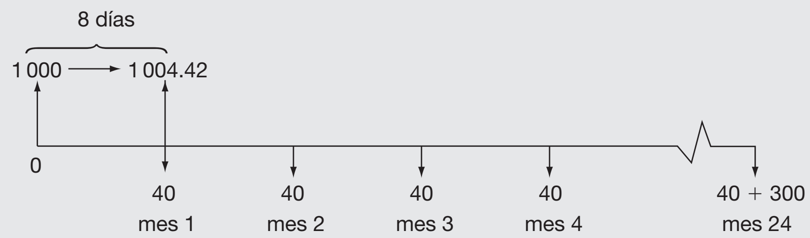
$$VP_8 = VP_0\left(1+\frac{R}{12}\right)^{\text{no. de meses}} = 1\,000\cdot\left(1+\frac{0.2}{12}\right)^{8/30} = 1\,000\cdot(1.0167)^{0.2667} = 1\,004.42$$

Ahora podemos usar este valor como el VA en el menú VDT:

12 NO.P AÑO, MODO INIC, N = 24, VA = 1 004.42, PAGO = 40, VF = 300.

Al pulsar la etiqueta **%IA** obtenemos la respuesta: 19.67.

El diagrama de flujo de efectivo de este problema es el siguiente:



Respuesta: La tasa de interés implícita en el contrato es de 19.67%.

ANUALIDADES CONTINUAS

En el caso de anualidades el adjetivo "continuo" puede aplicarse a la forma en que se capitalizan los intereses o la forma en que se recibe el pago. Un caso ocurre cuando los pagos son periódicos, mensuales por ejemplo, pero la capitalización es continua. Otro caso sucede cuando el mismo flujo de dinero se produce en forma continua, los ingresos de un negocio, por ejemplo.

Pagos periódicos, capitalización continua

Cuando los pagos son periódicos pero la capitalización es continua se trata de una anualidad general. Será entonces necesario calcular la tasa nominal con la frecuencia de capitalización igual a la frecuencia de pagos, equivalente a la tasa nominal con capitalización continua.

EJEMPLO 1

Calcule el valor presente de una anualidad de 36 pagos mensuales de $1 000, si la tasa de interés de 15% se compone continuamente.

$$N = 36 \text{ meses}, \qquad R = 15\%, \qquad a = 1000, \qquad VA = ?$$

Solución: Si la tasa de 15% se compone continuamente, la tasa efectiva es: $e^{0.15} - 1 = 0.1618$. La tasa nominal compuesta mensualmente que produce la tasa efectiva de 16.18% es de 15.0941%. Utilizamos esta tasa en el módulo VDT de la calculadora:

12 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 36, **%IA** = 15.0941, PAGO = 1 000, VF = 0.

Al pulsar la tecla del menú VA obtenemos el resultado: −28 808.94.

Si la capitalización fuese mensual, la respuesta sería: 28 847.27. La diferencia que produce la capitalización continua no es muy significativa.

EJEMPLO 2

Calcule el valor futuro de una anualidad de 12 pagos anuales de $10000, si la tasa de interés de 20% se compone continuamente.

N = 12 años, R = 20%, PAGO = 10000, VF = ?

Solución: Si la tasa de 20% se compone continuamente, la tasa efectiva es: $e^{0.2} - 1 = 0.2214$. Con la capitalización anual, la tasa nominal es igual a la tasa efectiva, es decir, 22.14%. Utilizamos esta tasa en el módulo VDT de la calculadora:

1 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 12, **%**IA = 22.14, VA = 0, PAGO = 10000.

Al pulsar la tecla del menú VF obtenemos la respuesta: −452712.35.

Si la capitalización fuese anual, la respuesta sería: 395805.02. La diferencia que produce la capitalización continua en este caso sí es significativa.

Para las personas que se sienten incómodas con los métodos utilizados en la solución de los problemas 1 y 2 desarrollaremos fórmulas aplicables de manera inmediata para este tipo de problemas.

Supongamos que existe una anualidad de n pagos periódicos a. La tasa de interés es R, compuesta continuamente. El valor futuro de esta anualidad es la suma de los valores futuros de todos los n pagos. Al utilizar la capitalización continua, podemos escribir esta suma como:

$$VFA = ae^{R(n-1)} + ae^{R(n-2)} + \cdots + ae^{R} + a$$

Al factorizar el factor común a, tenemos:

$$VFA = a\left[e^{R(n-1)} + e^{R(n-2)} + \cdots + e^{R} + 1\right]$$

Podemos llamar S_n a la expresión entre corchetes:

$$S_n = e^{R(n-1)} + e^{R(n-2)} + \cdots + e^{R} + 1$$

multiplicada por e^R, tenemos:

$$e^R S_n = e^{Rn} + e^{R(n-1)} + \cdots + e^{R2} + e^{R}$$

Al restar la primera ecuación de la segunda y aprovechando la propiedad telescópica, obtenemos:

$$S_n\left(e^R - 1\right) = e^{Rn} - 1$$

donde

$$S_n = \frac{e^{Rn} - 1}{e^R - 1}$$

Al sustituir el valor de S_n por los corchetes, obtenemos la fórmula para el *valor futuro de la anualidad con capitalización continua*.

$$\boxed{VFA = \frac{a}{e^R - 1}\left(e^{Rn} - 1\right)}$$

Para utilizar esta fórmula es necesario recordar que la tasa de interés R se refiere al periodo de pago. En el problema 2, por ejemplo, el pago es anual y la tasa de interés también.

Al introducir los datos del problema 2 en la fórmula, tenemos:

$$VFA = \frac{10\,000}{e^{0.2} - 1}\left(e^{0.2(12)} - 1\right) = 452\,712.35$$

El resultado es idéntico que el obtenido con el método de la tasa efectiva.

La fórmula para el *valor presente de una anualidad con capitalización continua* se obtiene dividiendo el valor futuro entre e^{Rn}:

$$\boxed{VPA = \frac{a}{e^R - 1}\left(1 - \frac{1}{e^{Rn}}\right)}$$

Para aplicar esta fórmula en el problema 1 necesitamos utilizar la tasa de interés mensual dado que el pago también es mensual.

$$VPA = \frac{1\,000}{e^{0.15/12} - 1}\left(1 - \frac{1}{e^{0.15(3)}}\right) = 28\,808.94$$

Es el mismo resultado que el obtenido con el método de la tasa efectiva.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Calcule el valor presente de 15 pagos trimestrales de $20 000, si la tasa de interés de 25% se compone continuamente.

Respuesta: $188 665.63.

Anualidad de flujo continuo

Cuando, además de la capitalización, el mismo flujo también es continuo, la situación se complica un poco. En primer lugar, ¿qué significa un flujo continuo? Un flujo es continuo si la frecuencia de pagos es mayor que cualquier número positivo. En otras palabras, los pagos se reciben cada milésimo de segundo. Es como un río de dinero que nunca deja de fluir.[2]

[2] Los pagos diarios son una aproximación aceptable de un flujo continuo.

¿Cómo medir un flujo continuo? Se mide como una *tasa por periodo*. El flujo de un río, por ejemplo, se puede medir por el número de metros cúbicos por segundo. En el caso del dinero utilizaremos la tasa $a(t)$ por año. $a(t)$ puede ser constante o variable. Primero analizaremos el caso de una tasa constante: $a(t) = a$.

Si el flujo por periodo es a, el valor futuro de este flujo es ae^{Rt}. Para obtener el valor futuro de todos los flujos en N periodos, necesitamos sumar sus valores futuros. Un equivalente continuo de la sumatoria es la integral definida. Así, podemos escribir el valor futuro de la anualidad continua como:

$$VFA_{\text{cont}} = \int_0^N ae^{Rt}dt$$

Al hacer la integración, tenemos:

$$\int_0^N ae^{Rt}dt = a\frac{1}{R}e^{Rt}\Big|_0^N = \frac{a}{R}\left[e^{RN} - 1\right]$$

El *valor futuro de una anualidad de flujo continuo* es:

$$\boxed{VFA_{\text{cont}} = \frac{a}{R}\left[e^{RN} - 1\right]}$$

EJEMPLO 3

Calcule el valor futuro de un flujo continuo de $50 000 anuales después de cinco años, si la tasa de interés es de 18%.

N = 5 años, R = 18%, a = 50 000, VFA = ?

Solución: Sustituimos los datos del problema en la fórmula del valor futuro de la anualidad continua.

$$VFA_{\text{cont}} = \frac{50\,000}{0.18}\left[e^{0.18(5)} - 1\right] = 405\,445.31$$

Respuesta: Después de cinco años el flujo anual continuo de $50 000 vale $405 445.31.

Si se tratara de una anualidad ordinaria, su valor futuro sería de $357 710.49. La diferencia entre los dos métodos para calcular es significativa.

Valor presente de una anualidad de flujo continuo

Para obtener la fórmula del valor presente de una anualidad de flujo continuo sólo dividimos la fórmula del valor futuro entre e^{RN}

$$VPA_{\text{cont}} = \frac{a}{R}\left[1 - \frac{1}{e^{RN}}\right]$$

EJEMPLO 4

Calcule el valor presente de un flujo continuo de $50 000 anuales durante cinco años, si la tasa de interés es de 18%.

$$N = 5 \text{ años}, \qquad R = 18\%, \qquad a = 50\,000, \qquad \text{VPA} = ?$$

Solución: Sustituimos los datos del problema en la fórmula del valor presente de la anualidad continua:

$$VPA_{\text{cont}} = \frac{50\,000}{0.18}\left[1 - \frac{1}{e^{0.18(5)}}\right] = 164\,841.76$$

Respuesta: El valor presente de un flujo continuo anual de $50 000 de cinco años es de $164 841.76.

Si se tratara de una anualidad ordinaria, su valor presente sería de $156 358.55.

En la actualidad las anualidades de flujo continuo tienen pocas aplicaciones prácticas. Prevalece la convención del fin del periodo, sin embargo, ésta es un tanto artificial. Los ingresos de una empresa se parecen más a un flujo continuo, distribuido uniformemente durante todo el año que a una cantidad total que se da al final del mismo. El análisis continuo se adapta mejor a los fenómenos de la vida real, sin embargo, el análisis discreto se ajusta mejor a los convencionalismos contables y estadísticos. El autor está convencido de que en el futuro el análisis continuo adquirirá una importancia mucho mayor que hasta ahora.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Calcule el valor presente de los ingresos de una empresa en los próximos seis años. Los ingresos se presentan como flujos continuos a la tasa de $300 000 anual. El costo de capital es de 27%.

Respuesta: $891 223.67.

Anualidades de flujo continuo creciente

Si el flujo anual crece a una tasa constante, g, es necesario modificar las fórmulas de las anualidades continuas.

$$a(t) = a\,e^{gt}$$

donde a es la tasa de flujo en el periodo inicial,
g es la tasa anual de crecimiento del flujo.

Para determinar el valor futuro de un flujo continuo creciente es necesario construir y resolver una ecuación diferencial. El saldo del flujo, $P(t)$, es una función del tiempo, t. Para simplificar la notación en vez de $P(t)$ utilizaremos P. En cualquier momento la tasa de cambio del saldo del flujo, la derivada de P con respecto de t, es la suma del interés que genera el saldo y el flujo continuo que crece al ritmo g.

$$\frac{dP}{dt} = \underbrace{R \cdot P}_{\text{interés}} + \underbrace{a \cdot e^{gt}}_{\text{pago creciente}}$$

Al reordenar los términos obtenemos una ecuación diferencial lineal de primer orden, con término variable.

$$\frac{dP}{dt} - RP = a\,e^{gt}$$

Para resolver esta ecuación multiplicamos ambos lados por el *factor de integración*, e^{-Rt}

$$e^{-Rt}\frac{dP}{dt} - e^{-Rt}RP = e^{-Rt}a\,e^{gt} = a\,e^{(g-R)t}$$

Al observar con cuidado el lado izquierdo constatamos que es la derivada con respecto al tiempo de $e^{-Rt}P$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-Rt}P\right) = e^{-Rt}\frac{dP}{dt} - Re^{-Rt}P = a\,e^{(g-R)t}$$

Para calcular P integramos ambos lados respecto al tiempo:

$$e^{-Rt}P = \int a\,e^{(g-R)t}dt = \frac{a}{g-R}e^{(g-R)t} + C$$

donde C es una constante arbitraria de integración.

Al multiplicar ambos lados por e^{Rt}, obtenemos la solución general de la ecuación diferencial:

$$P(t) = \frac{a}{g-R}e^{gt} + Ce^{Rt}$$

Cuando $t = 0,\ C = P_0 - \dfrac{a}{g-R}$, la solución definida tiene la forma:

$$P(t) = \frac{a}{g-R}e^{gt} + \left(P_0 - \frac{a}{g-R}\right)e^{Rt}$$

Cuando el saldo inicial es cero, $P_0 = 0$, la solución de la ecuación diferencial nos proporciona la fórmula para el *valor futuro de una anualidad de flujo continuo creciente*.

$$\boxed{\mathrm{VFA}_{\mathrm{cont}} = \frac{a}{g-R}\left(e^{gt} - e^{Rt}\right)}$$

En caso de que $R > g$, resulta más cómodo escribir esta fórmula como:

$$\boxed{\mathrm{VFA}_{\mathrm{cont}} = \frac{a}{R-g}\left(e^{Rt} - e^{gt}\right)}$$

Para aplicar estas fórmulas repetiremos el ejemplo 3, pero añadiendo el supuesto de que el flujo crece a una tasa anual de 5%.

EJEMPLO 5

Calcule el valor futuro de un flujo continuo de \$50 000 anuales después de cinco años, si la tasa de interés es de 18% y el mismo flujo crece a una tasa anual de 5%.

$$\mathrm{N} = 5 \text{ años}, \quad R = 18\%, \quad g = 5\%, \quad a = 50\,000, \quad \mathrm{VFA} = ?$$

Solución: Sustituimos los datos del problema en la fórmula del valor futuro de la anualidad continua con pagos crecientes:

$$VFA_{\mathrm{cont}} = \frac{50\,000}{0.18 - 0.05}\left(e^{(0.18)5} - e^{(0.05)5}\right) = 452\,145.27$$

Respuesta: El valor futuro de un flujo continuo anual de \$50 000 que dura cinco años y crece a 5% anual es de \$452 145.27.

Si utilizamos la fórmula para el valor futuro de una anualidad discreta con pago creciente obtendremos un resultado muy inferior:

$$VFA = \frac{a_1}{R-g}\left[(1+R)^N - (1+g)^N\right] = \frac{50\,000(1.05)}{0.18 - 0.05}\left[(1.18)^5 - (1.05)^5\right] = 408\,480.78$$

Esto ocurre por dos razones. Con el flujo continuo el dinero se recibe todo el año y no sólo al final, por lo que tiene más tiempo para ganar el interés. Por otro lado, con la capitalización continua la tasa efectiva es más alta que la tasa nominal. Concretamente, la tasa de 18% compuesta continuamente corresponde a 19.72% compuesto una vez al año. Si sustituimos esta tasa en la fórmula del valor futuro de una anualidad discreta con pago creciente, el resultado será de \$421 990.86.

El caso del *valor presente de una anualidad de flujo continuo* con el flujo creciente a un ritmo constante, g, es muy semejante.

El valor presente de un flujo creciente es:

$$VP[a(t)] = a(t)e^{-Rt} = a\,e^{gt}e^{-Rt} = a\,e^{(g-R)t}$$

El valor presente de estos flujos de n periodos es la integral definida:

$$VPA_{\text{cont}} = \int_0^N a\, e^{(g-R)t} dt = \frac{a}{g-R} e^{(g-R)t}\Big|_0^N = \frac{a}{g-R}\left[e^{(g-R)N} - 1\right]$$

Podemos escribir dos versiones del valor presente de una anualidad de flujo continuo creciente.

Cuando $g > R$:

$$\boxed{VPA_{\text{cont}} = \frac{a}{g-R}\left[e^{(g-R)N} - 1\right]}$$

Cuando $g < R$:

$$\boxed{VPA_{\text{cont}} = \frac{a}{R-g}\left[1 - \frac{1}{e^{(R-g)N}}\right]}$$

Para que la última fórmula se asemeje más a la fórmula discreta podemos escribirla como:

$$VPA_{\text{cont}} = \frac{a}{R-g}\left[1 - \frac{e^{gN}}{e^{RN}}\right]$$

EJEMPLO 6

Calcule el valor presente de un flujo continuo de \$50 000 anuales durante cinco años, si la tasa de interés es de 18% y el mismo flujo crece a una tasa anual de 5%.

N = 5 años, R = 18%, g = 5%, a = 50 000, VPA = ?

Solución: Sustituimos los datos del problema en la fórmula del valor presente de la anualidad continua con pagos crecientes, caso $R > g$:

$$VPA_{\text{cont}} = \frac{50\,000}{0.18 - 0.5}\left[1 - \frac{1}{e^{(0.18-.05)5}}\right] = 183\,828.55$$

Respuesta: El valor presente de un flujo continuo anual de \$50 000 que dura cinco años y crece a un ritmo de 5% anual es de \$183 828.55.

Si utilizamos la fórmula para el valor presente de una anualidad discreta con pago creciente obtendremos un resultado ligeramente inferior:

$$VPA = \frac{a_1}{R-g}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^N\right] = \frac{50\,000(1.05)}{=0.18 - 0.05}\left[1 - \left(\frac{1.05}{1.18}\right)^5\right] = 178\,550.71$$

Al utilizar la tasa efectiva de 19.72%, el resultado será de \$171 568.68.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Calcule el valor presente de un flujo continuo de ingresos que dura siete semestres. Los ingresos crecen a un ritmo de 15% cada semestre y en el primero el flujo es de $35 000. La tasa de interés es de 28% anual.

Respuesta: $253 778.63.

FÓRMULAS DEL CAPÍTULO

Anualidad con capitalización continua $VPA = \frac{a}{e^R - 1}\left(1 - \frac{1}{e^{Rn}}\right)$	Anualidad con capitalización continua $VFA = \frac{a}{e^R - 1}\left(e^{Rn} - 1\right)$
Anualidad de flujo continuo $VPA_{\text{cont}} = \frac{a}{R}\left[1 - \frac{1}{e^{RN}}\right]$	Anualidad de flujo continuo $VFA_{\text{cont}} = \frac{a}{R}\left[e^{RN} - 1\right]$
Anualidad de flujo creciente: $R > g$ $VPA_{\text{cont}} = \frac{a}{R - g}\left[1 - \frac{e^{gt}}{e^{Rt}}\right]$	Anualidad de flujo creciente: $R > g$ $VFA_{\text{cont}} = \frac{a}{R - g}\left(e^{Rt} - e^{gt}\right)$

Términos clave

Anualidad equivalente
Anualidad general
Anualidades diferidas
Capital humano
Capitalización continua
Flujo continuo
Flujo continuo creciente
Fondo con retiros periódicos
Hipoteca canadiense
Hipoteca comprada con descuento
Ingreso permanente
Pago periódico equivalente
Primer pago irregular
Riqueza total
Tasa de interés equivalente
Tasa de porcentaje anual

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. ¿Cuál es el valor futuro de ocho pagos semestrales de $10 000 (realizados al final de cada semestre) si la tasa de 20% se compone mensualmente?
2. ¿Cuál es el pago mensual, equivalente a un pago trimestral de $15 000 si la tasa de interés de 14% se compone trimestralmente?
3. Reemplazar una anualidad de $100 000 por pagos mensuales a una tasa de 12% compuesta semestralmente.
4. ¿Cuál es el valor presente de 30 pagos mensuales de $1 000 si la tasa de 20% se compone semestralmente?
5. Calcule el valor futuro y el valor presente de 10 pagos anuales de $50 000 a una tasa de 15% compuesta mensualmente.

6. Para comprar un terreno el enganche es de $100 000 y el resto se paga en 10 cuotas semestrales de $30 000. ¿Cuál es el precio al contado si la tasa de interés es de 18% compuesta mensualmente?
7. Una persona de 45 años de edad gana $400 000 anuales y planea retirarse a los 65 años. Cree que después de jubilarse vivirá otros 15 años y desea mantener un nivel de gasto constante durante toda su vida. Supone que su ingreso actual se mantendrá constante en términos reales y que puede invertir sus ahorros a una tasa real de 3.5%. Calcule el valor de capital humano de esta persona y el nivel anual de su ingreso permanente.
8. La persona del problema 7 ya tiene un capital de $1 000 000. Calcule su riqueza total y su ingreso permanente. Interprete los resultados.
9. ¿Cuál es el pago mensual necesario para amortizar una hipoteca canadiense de $250 000 a 20 años si la tasa de interés es de 14%?
10. Una hipoteca canadiense por $450 000 a 25 años se negoció a la tasa de 23%.

    a) ¿cuál es pago mensual necesario para amortizar la hipoteca?

    b) ¿cuál sería el pago mensual si se tratara de una hipoteca convencional?
11. Un inversionista compra una hipoteca a 30 años con un valor original de $200 000. La hipoteca fue emitida hace cinco años a una tasa de 8.75%. ¿Cuál es el rendimiento de la inversión en hipoteca si el precio de compra es de $165 000?
12. Una persona invierte $320 000 en una hipoteca que tiene, todavía, 16 años de vida. La hipoteca original fue pactada a 20 años por $380 000, a una tasa de 19%. La hipoteca será liquidada en efectivo en el décimo aniversario de su contratación. ¿Cuál será el rendimiento del inversionista en el momento de la liquidación de la hipoteca?
13. En una hipoteca por $400 000, emitida a 25 años, con la tasa de interés de 23%, el banco cobra un honorario de 1.5 puntos por la emisión. ¿Cuál es la tasa de porcentaje anual implícita en este contrato?
14. ¿Cuál será el saldo de un fondo de 500 000 Udis después de cinco años si el fondo ofrece un rendimiento de 4.5% y si los retiros mensuales son de 1 500 Udis?
15. Un padre, cuando su hijo cumple 10 años, abre un fideicomiso de 70 000 Udis que rinde 7.5% anual, compuesto semestralmente. El objetivo del fideicomiso es financiar los estudios universitarios del hijo, que empiezan cuando éste cumple los 18 años. El fideicomiso pagará nueve abonos semestrales al principio de cada semestre. Calcule el monto de cada uno de estos abonos.
16. Calcule el valor presente de una renta de $150 000 semestrales, si el primer pago se recibe dentro de dos años y el último dentro de 10 años y la tasa de interés es de 9.75%.
17. Se contrata un préstamo de $100 000 a 25%. El préstamo será pagado con 24 mensualidades, con 3 meses de gracia (la primera mensualidad se pagará tres meses después de recibir el préstamo). ¿Cuál es el pago mensual?
18. Calcule el valor futuro de 10 pagos trimestrales de $15 000 a una tasa de 20% compuesta continuamente.
19. Calcule el valor futuro de ocho pagos semestrales de $60 000 a 25% compuesto continuamente.
20. ¿Cuánto tiene que depositar al final de cada mes, durante 20 meses, para reunir una cantidad de 220 000, si su cuenta rinde 17.7% anual compuesto continuamente?
21. ¿Cuántos depósitos mensuales de $6 000 tiene que efectuar para reunir $200 000, si su cuenta rinde 18% compuesto continuamente? Si el número de pagos no es entero, ajuste el monto del último pago.
22. Calcule el valor presente de 50 pagos quincenales de $800 a 23% compuesto continuamente.

23. Un filántropo dona a su universidad \$1 millón para financiar un proyecto de investigación que durará tres años. Si la tasa de interés del fondo en que fue depositada su donación es de 15% compuesto continuamente, ¿cuál es el pago que recibirá el director del proyecto al final de cada trimestre?
24. Un proyecto de inversión produce un flujo de efectivo neto de \$450 000 anual durante los cuatro años de su duración. El flujo es durante todo el año y no como cantidad fija al final del periodo. Calcule el valor presente del proyecto si el costo de capital de la empresa es de 25%. Compare el resultado con el que se obtendría observando la convención del fin del periodo.
25. Calcule el valor terminal bruto del proyecto del ejercicio anterior y compárelo con el valor que se obtendría observando la convención del fin del periodo.
26. Los ingresos netos de una empresa se producen como un flujo continuo que crece a un ritmo de 12% anual. En el primer año los ingresos eran de \$120 000. Calcule el valor presente de los ingresos en los próximos cinco años si el costo de capital de la empresa es de 22%. Compare el resultado con el que se obtendría si los ingresos se produjeran al final de cada año (gradiente geométrico).
27. Calcule el valor presente de un flujo continuo de \$200 000 anuales durante siete años si la tasa de interés es de 18% y el mismo flujo crece a una tasa anual de 25%.

CAPÍTULO 10

Amortización y fondos de amortización

Objetivos del aprendizaje

Después de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

- Entender el proceso de amortización de una deuda.
- Construir una tabla de amortización con la calculadora financiera y sin ella.
- Calcular el saldo insoluto de la deuda.
- Calcular los derechos del deudor.
- Desarrollar sistemas de amortización con pagos crecientes.
- Entender el proceso de acumulación de un fondo de amortización.
- Calcular el saldo de un fondo en cualquier momento.
- Calcular el rendimiento de un fondo.

CONCEPTOS BÁSICOS

Amortizar significa reducir gradualmente el saldo de una deuda mediante una serie de pagos periódicos que contienen, además del pago de intereses, los abonos a capital.

Un *préstamo amortizable*, tal como un crédito hipotecario o un crédito para automóvil, es un préstamo en el cual se reembolsa el principal a medida que se hacen los pagos periódicos.[1]

Cuando se amortiza una deuda, cada uno de los pagos periódicos cubre los intereses causados hasta ese momento y el resto se utiliza en la disminución del importe de la deuda (amortización). Para que el número de pagos sea finito, éstos tienen que ser por lo menos iguales al monto de los intereses. De otra manera la amortización sería negativa y la deuda crecería en lugar de reducirse.

Los diversos sistemas de amortización son los usos de las anualidades que ya han sido estudiadas en los capítulos anteriores. Es posible diseñar un número infinito de sistemas de amortización. En el presente capítulo nos limitaremos a los aspectos fundamentales.

El *fondo de amortización* consiste en acumular alguna cantidad específica en el futuro mediante el proceso de abonos periódicos. El objetivo del fondo de amortización puede ser liquidar una deuda futura. La acumulación de un fondo de amortización es un proceso inverso al de amortización de la deuda. El saldo del fondo incluye siempre la suma de todos los pagos efectuados más los intereses generados por éste.

Según la *regla fundamental de las amortizaciones*, el interés que se paga al final de cada periodo se calcula sobre el saldo insoluto del periodo inmediatamente anterior. Otros métodos para calcular los intereses tienen por objetivo obtener tasas de interés mayores que las pactadas.

Aun cuando el número de sistemas de amortización puede ser infinitamente grande, resulta útil clasificar dichos sistemas en los grupos más importantes.

Sistemas de amortización

1. *Amortización gradual.* Consiste en pagos iguales, en intervalos iguales, con los intereses calculados sobre saldos insolutos. La amortización aumenta con cada pago en la medida en que se reduce el saldo insoluto. Es un sistema muy usual.

2. *Amortización constante*. En este sistema el valor de amortización es constante en cada periodo. El pago es decreciente porque los intereses se calculan sobre un saldo que se reduce con cada amortización.

3. *Amortización por cuotas incrementadas*. Los pagos periódicos se ajustan al alza cada periodo o cada cierto número de ellos, por ejemplo, cada año. Es una aplicación de las anualidades de pago creciente: gradiente aritmético y gradiente geométrico. El objetivo de incrementar los pagos puede ser salvaguardar el valor real de los mismos: los pagos se ajustan a la inflación. Otro objetivo puede ser tomar en cuenta el mejoramiento económico del deudor: los pagos crecen al mismo ritmo que el ingreso del deudor.

4. *Amortización decreciente*. El deudor paga cuotas mayores en los primeros periodos y cuotas menores en los periodos posteriores. Estos sistemas pueden ser aplicados en un entorno de inestabilidad económica.

---

[1] Si el préstamo no es amortizable, el deudor sólo hace pagos periódicos que cubren los intereses sobre el principal y el mismo principal lo devuelve al final.

5. *Amortización con cuotas extraordinarias*. Este sistema prevé una aportación extraordinaria cada cierto número de periodos.

En el estudio de las amortizaciones, igual que en el estudio de las anualidades, se presentan tres tipos de problemas:

a) calcular el pago periódico,

b) calcular el número de pagos, y

c) calcular la tasa de interés.

Después de estudiar las anualidades el lector tiene la capacidad de resolver cada uno de estos problemas. Un rasgo distintivo del estudio de las amortizaciones es la construcción de tablas de amortización, donde se registra el proceso de la extinción de la deuda.

EJEMPLO 1

Una empresa solicita un préstamo de $100 000 que será liquidado mediante tres pagos iguales al final de cada año. La tasa de interés anual es de 25%. ¿Cuál es el monto de los pagos anuales?

$$VPA = 100\,000, \qquad R = 0.25, \qquad n = 3, \qquad a = ?$$

Solución: Utilizamos la fórmula para la renta que se deriva de la fórmula del valor presente de una anualidad:

$$a = \frac{VPA_{R,n}(R)}{\left(1 - \frac{1}{(1+R)^n}\right)} = \frac{100\,000(0.25)}{\left(1 - \frac{1}{1.25^3}\right)} = 51\,229.5$$

Respuesta: El pago anual es de $51 229.5.

Al saldar la deuda, la empresa habrá pagado $153 688.52. De esta cantidad $100 000 corresponden al pago de capital y $53 688.52 al pago de intereses. Cada pago anual tiene dos componentes: uno de interés y uno de abono al capital (amortización). El monto de cada componente varía anualmente. En la siguiente tabla podemos observar la descomposición de cada pago en interés y reembolso de capital.

Año	Pago anual	Interés 0.25 × saldo	Amortización pago − interés	Saldo
0	–	–	–	100 000.0
1	51 229.5	25 000.0	26 229.5	73 770.5
2	51 229.5	18 442.6	32 786.9	40 983.6
3	51 229.5	10 245.9	40 983.6	0.0
Σ	**153 688.5**	**53 688.5**	**100 000.0**	

En la construcción de la tabla de amortización tendrán que observarse las siguientes reglas:

- El saldo inicial es igual al monto original de la deuda.
- El saldo del periodo es igual al saldo del periodo anterior menos la amortización del periodo.
- El interés del periodo se calcula multiplicando el saldo insoluto del periodo anterior por la tasa de interés.
- La amortización es igual al pago menos los intereses. Con cada pago el componente de los intereses se reduce y el componente de la amortización aumenta.
- En algunos casos, debido al redondeo, hay que ajustar el último pago.
- La suma de los pagos anuales es igual a la suma de los intereses más la suma de las amortizaciones (abonos a capital).

Cuando el número de pagos es grande, la construcción de la tabla de amortización puede ser tediosa. Las hojas electrónicas de cálculo están adaptadas para este tipo de tareas. Cuando el periodo no es muy largo, o cuando lo único que necesitamos es el saldo después de un número determinado de pagos, es útil la calculadora financiera. A continuación explicamos cómo se puede construir una tabla de amortización del ejemplo 1 con la calculadora financiera HP-17BII.

Primero tenemos que calcular el pago anual en el módulo VDT.

1 NO.P AÑO, MODO FINAL, CLEAR DATA, $N = 3$, %IA = 25, $VA = 100\,000$.

Al pulsar PAGO, obtenemos la respuesta: $-$ 51 229.5.

Ahora pulsamos la tecla OTRO y AMRT. En la pantalla podemos ver los siguientes rótulos de menú:

NO. P	INT	CTAL	BAL	SGTE	TABLA

NO. P	número de pago,
INT	interés,
CTAL	amortización (el abono al capital),
BAL	saldo,
SGTE	nos desplaza al siguiente renglón de la tabla de amortización,
TABLA	para imprimir la tabla.

Introducimos "1" en NO. P y pulsamos la tecla INT para encontrar que el interés en el periodo 1 es $-25\,000$. La tecla CTAL nos informa que el abono al capital fue de $-26\,229.5$ y la tecla BAL indica que después del primer pago, el saldo es de 73 770.49. Así obtuvimos el primer renglón de la tabla de amortización.

Al pulsar la tecla SGTE nos desplazamos al siguiente renglón. Pulsando las teclas INT, CTAL, BAL obtenemos el segundo renglón de la tabla de amortización. Siguiendo este procedimiento podemos obtener, renglón por renglón, la tabla de amortización más larga.

Como vimos en el ejemplo 1, el cálculo de amortizaciones implica el uso de las fórmulas de anualidades. Concretamente, es posible calcular el importe de los pagos (a), el número de pagos (n), la tasa de interés (R), los derechos adquiridos por el deudor y el saldo a favor del acreedor.

IMPORTE DE LOS PAGOS

En el ejemplo 1 de la sección anterior vimos cómo se calcula el importe de los pagos si éstos son iguales. La fórmula correspondiente es:

$$a = \frac{VPA_{R,n}(R)}{\left(1 - \frac{1}{(1+R)^n}\right)}$$

EJEMPLO 1

¿Cuál es el monto de los pagos mensuales, si la deuda de 100 000 Udis a 20 años se contrató con la tasa de interés anual de 8.75%?

$VPA = 100\ 000$, $R = 0.0875/12 = 0.0073$ mensual, $n = 240$, $a = ?$

Solución: Utilizamos la fórmula para el pago periódico:

$$a = \frac{VPA_{R,n}(R)}{1-(1+R)^{-n}} = \frac{100\ 000\ (0.0073)}{1-(1.0073)^{-240}} = 883.71$$

Respuesta: El pago mensual es de 883.71 Udis.

Después de 20 años, el deudor habrá pagado 212 090.56 Udis, de las cuales 100 000 se habrán dedicado a la amortización y las restantes 112 090.56 al pago de los intereses. Para saber cómo se distribuye cada pago en amortización e intereses tendríamos que construir una tabla semejante a la del ejemplo 1, pero más larga.

En la calculadora financiera la secuencia es:

12 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 240, %IA = 8.75, VA = 100 000

Al pulsar la tecla PAGO, obtenemos la respuesta: −883.71.

A continuación se presenta una tabla de amortización de los primeros 10 periodos:

Mes	Pago mensual	Interés 0.0073 × saldo	Amortización pago − interés	Saldo
0				100 000.00
1	883.71	729.17	154.54	99 845.46
2	883.71	728.04	155.67	99 689.78
3	883.71	726.90	156.81	99 532.98
4	883.71	725.76	157.95	99 375.03
5	883.71	724.61	159.10	99 215.93
6	883.71	723.45	160.26	99 055.67
7	883.71	722.28	161.43	98 894.24
8	883.71	721.10	162.61	98 731.63
9	883.71	719.92	163.79	98 567.84
10	883.71	718.72	164.99	98 402.85
Σ	**8 837.10**	**7 239.96**	**1 597.15**	

En la tabla de amortización se puede observar que, cuando el plazo del préstamo es largo, la amortización es muy lenta. Después de pagar un total de $8 837.1, el deudor apenas canceló 1.6% de su deuda.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Si en vez de amortizar la deuda el deudor pudiese aportar cada mes 883.71 Udis a una cuenta que rindiese 8.75%, ¿qué cantidad tendría después de 20 años?

Respuesta: 571 818.04 Udis.

Cuando los pagos periódicos no son suficientes para saldar la deuda en un número entero de periodos, se calcula el último pago para completar la liquidación de la deuda.

EJEMPLO 2

Una deuda de $150 000 contratada a 23% debe amortizarse mediante ocho pagos trimestrales de $23 000 cada uno. Elabore la tabla de amortización de la deuda. ¿Cuál es el monto del último pago?

$VPA = 150\,000$, $R = 23\%$ anual $= 5.75\%$ trimestral, $n = 8$, $a = 23\,000$

Trimestre	Pago trimestral	Interés 0.0575 × saldo	Amortización pago − interés	Saldo
0				150 000.00
1	23 000.00	8 625.00	14 375.00	135 625.00
2	23 000.00	7 798.44	15 201.56	120 423.44
3	23 000.00	6 924.35	16 075.65	104 347.78
4	23 000.00	5 999.99	17 000.00	87 347.78
5	23 000.00	5 022.50	17 977.50	69 370.28
6	23 000.00	3 988.79	19 011.21	50 359.07
7	23 000.00	2 895.65	20 104.35	30 252.72
8	23 000.00	1 739.65	21 260.35	8 994.36
9	9 511.54	517.18	8 994.36	0.00
Σ	**193 511.54**	**43 511.54**	**150 00.00**	

Después de efectuar ocho pagos de $23 000 c/u queda todavía un saldo de 8 994.36. El deudor tiene la opción de pagar este saldo junto con su octavo pago, que en este caso sería de $31 994.36, o hacer un noveno pago de $9 511.54. Esta cantidad se obtiene al sumar al saldo de la deuda los intereses que genera: $8\,994.36(1 + 0.0575) = 9\,511.54$.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Intereses sobre el saldo inicial

Algunas veces el vendedor pretende disfrazar la verdadera tasa de interés recurriendo al artificio de calcular los intereses sobre la deuda inicial y no sobre los saldos insolutos. Un ejemplo ilustra cómo funciona este esquema:

Para comprar un automóvil la agencia otorga un crédito de $100 000 a 24 meses. El pago mensual es de $5 500 y el vendedor dice que la tasa anual que cobra la agencia es de 16%. Si introducimos los datos del problema en el módulo VDT, obtenemos la tasa de interés de 28.22%.

1) ¿Cómo calculó la agencia la tasa de interés de 16%?

2) ¿Dónde está la trampa?

La agencia hace el siguiente cálculo:

1) La cantidad pagada por el cliente: $24 \times 5\,500 = 132\,000$, de lo cual $100 000 es la amortización y $32 000 son los intereses. $32 000 durante dos años equivale a $16 000 anual, o sea, 16% del préstamo.

2) La falacia consiste en calcular los intereses sobre el saldo inicial. Cada pago mensual reduce el saldo insoluto, por lo que el interés debe reducirse también.

El planteamiento de la agencia ignora totalmente el valor del dinero en el tiempo.

Amortización de cuotas crecientes (gradiente aritmético)

Cuando las cuotas son crecientes según la progresión aritmética, para calcular el primer pago es necesario calcular el valor presente del gradiente y restarlo del valor de la deuda. De esta manera, la anualidad de pagos crecientes se transforma en una anualidad simple que se resuelve con los métodos acostumbrados.

EJEMPLO 3

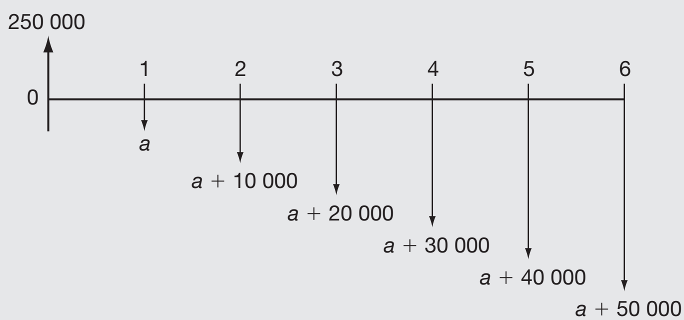
Una deuda de $250 000 contratada a 25% debe amortizarse mediante seis pagos semestrales. Cada pago será de $10 000 mayor que el anterior.

a) calcule el valor del primer pago y del último,

b) elabore la tabla de amortización de la deuda.

$VPA = 250\,000, \quad G = 10\,000, \quad R = 25\%$ anual $= 12.5\%$ semestral, $\quad n = 6, \quad a = ?$

Solución: El diagrama de flujo de efectivo del problema es el siguiente:



a) Calculamos el valor presente del gradiente aplicando la fórmula:

$$VP(G) = \frac{10\,000}{0.125}\left[\frac{1.125^6 - 1}{0.125(1.125)^6} - \frac{6}{1.125^6}\right] = 87\,537.39$$

El valor presente de la deuda, sin el valor presente del gradiente, es:

$$250\,000 - 87\,537.39 = 162\,462.6$$

Al utilizar este valor en la fórmula del valor presente de la anualidad simple, calculamos el pago:

$$162\,462.6 = \frac{a}{0.125}\left[1 - \frac{1}{1.125^6}\right] \quad \Rightarrow \quad a = 40\,076.24$$

El primer pago es de: $40 076.24.

El último pago es de: 40 076.24 + (6 − 1)10 000 = $90 076.24.

b) Para calcular la tabla de amortización utilizaremos la hoja de cálculo Excel:

Semestre	Pago	Interés	Amortización	Saldo
0				250 000.00
1	40 076.24	31 250.00	8 826.24	241 173.00
2	50 076.24	30 146.72	19 929.56	221 244.24
3	60 076.24	27 655.53	32 420.71	188 823.53
4	70 076.24	23 602.94	46 473.30	142 350.23
5	80 076.24	17 793.78	62 282.46	80 067.77
6	90 076.24	10 008.47	80 067.77	0.00
Totales	**390 457.44**	**140 457.44**	**250 000.00**	

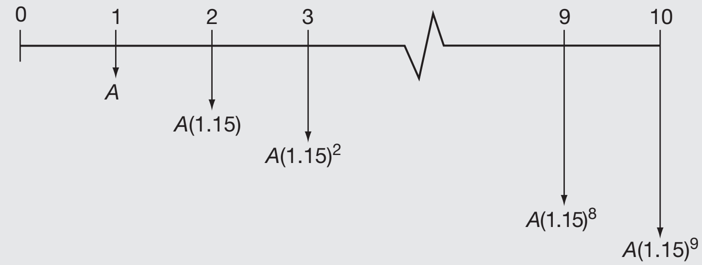
Si las cuotas crecen según una tasa fija (gradiente geométrico), el procedimiento es semejante. La situación se complica si las cuotas se ajustan cada cierto número de periodos.

EJEMPLO 4

El contrato de un préstamo de $450 000 a 10 años, con la tasa de 24%, prevé que los pagos mensuales se incrementarán 15% cada año sobre el valor del año anterior. Calcule el pago mensual del primer año y del último.

$$VPA = 450\,000, \quad g = 15\%, \quad R = 24\% \text{ anual}, \quad n = 10 \text{ años} = 120 \text{ meses}, \quad a = ?$$

Solución: Resolveremos el problema en dos etapas. En la primera calcularemos las cuotas anuales, equivalentes a las mensuales que se derivan del problema. En la segunda desagregaremos las cuotas anuales en pagos mensuales buscados. Las cuotas anuales, que crecen a un ritmo anual de 15% son: A, $A(1.15)$, $A(1.15)^2, \ldots, A(1.15)^9$, donde A es la cuota equivalente a los pagos del primer año y $A(1.15)^9$ es la cuota equivalente a los pagos mensuales del décimo año. Las cuotas anuales se presentan al final de cada año. Es un típico caso del gradiente geométrico, como se puede apreciar en la línea de tiempo:



Para calcular el valor de la primera cuota utilizamos la fórmula del gradiente geométrico teniendo cuidado de utilizar la tasa efectiva, ya que en el problema original los pagos son mensuales, por lo que la capitalización también es mensual.

La tasa efectiva aplicable para la fórmula del gradiente es:

$$\left(1+\frac{0.24}{12}\right)^{12} - 1 = 0.2682 = 26.82\%$$

Recordamos la fórmula del gradiente geométrico:

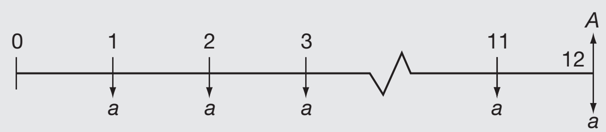
$$VPA = \frac{a_1}{R-g}\left[1-\left(\frac{1+g}{1+R}\right)^{n}\right]$$

Si sustituimos los datos del problema en la fórmula, tenemos:

$$450\,000 = \frac{A}{0.2682-0.15}\left[1-\left(\frac{1.15}{1.2682}\right)^{10}\right] \quad \Rightarrow \quad A = 85\,243.32$$

Para saldar la deuda del problema se requiere un pago de \$85 243.32 al final del primer año, y nueve pagos anuales adicionales, cada uno de los cuales sería 15% mayor que el anterior. El pago del segundo año, por ejemplo, sería de \$98 029.82, el último pago sería de \$299 875.47.

Lo único que falta es calcular el pago mensual del primer año, y de los subsiguientes. La línea de tiempo indica que se trata de calcular el pago mensual con base en el valor futuro de una anualidad simple.



Si 12 pagos mensuales equivalen a un pago final de \$85 243.32, el pago mensual a lo podemos despejar de la fórmula del valor futuro de anualidad simple.

$$85\,243.32 = \frac{a}{\left(\frac{0.24}{12}\right)}\left[\left(1+\frac{0.24}{12}\right)^{12} - 1\right] \quad \Rightarrow \quad a = 6\,355.71$$

El pago mensual en el primer año será de $6 355.71.

Hay dos maneras de calcular el pago mensual en el segundo año. La primera es aumentar 15% el pago del primer año: 6 355.71(1.15) = 7 309.06.

La segunda consistiría en despejar el valor del pago de una anualidad de 12 pagos cuyo valor futuro es de $98 029.82.

El pago mensual del último año sería: $6\ 355.71(1.15)^9 = 22\ 358.6$.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

En el ejemplo 4 calcule el pago mensual en el quinto año.

Respuesta: 11 116.18.

DERECHOS ADQUIRIDOS POR EL DEUDOR Y SALDO A FAVOR DEL ACREEDOR

En la medida en que sigue el proceso de amortización, el deudor adquiere cada vez más derechos sobre el bien objeto de venta. Simétricamente, el acreedor es dueño sólo del saldo en su favor.

Los derechos del deudor pueden calcularse de dos maneras:

1. Derechos del deudor = valor de la operación − saldo insoluto.
2. Derechos del deudor = suma de las amortizaciones.

En el ejemplo 1, después del segundo periodo, los derechos del deudor son:

1. $100\ 000 - 40\ 983.6 = 59\ 016.4$
2. $26\ 229.5 + 32\ 786.9 = 59\ 016.4$

Después de realizar dos pagos anuales de $59 229.5 cada uno, la empresa ya es dueña de 59% del capital solicitado en préstamo.

El saldo insoluto

Cuando tenemos elaborado el cuadro de amortización podemos averiguar el saldo insoluto para cualquier periodo con una simple inspección. Sin embargo, no siempre tenemos a la mano la tabla de amortización. Si los pagos son iguales y la tasa de interés es constante, no es necesario elaborar la tabla para saber cuál es el saldo a favor del acreedor. Existen varios métodos para calcular el saldo insoluto. El lector seleccionará el de su preferencia.

EJEMPLO 1

Si continuamos con el ejemplo 1 de la sección anterior suponemos que, después de cuatro años, el dueño quiere vender la casa mediante el traspaso de la deuda. ¿Cuál es el valor de la deuda que tiene que asumir el comprador?

$$VPA = 100\,000, \quad a = 883.71, \quad R = 0.0073 \text{ mensual}, \quad n = 48 \text{ meses}$$

Solución:

Método 1 (recomendado)

El saldo insoluto es el valor presente de los pagos restantes.

Después de cuatro años la deuda tiene todavía 16 años de vida. El saldo insoluto es el valor presente de 192 pagos de $883.71 cada uno.

$$\text{Saldo} = VPA_{0.0073\,192} = \frac{883.71}{0.0073}\left[1 - \frac{1}{(1.0073)^{192}}\right] = 91\,156.23$$

Método 2

Seleccionamos como fecha focal el periodo cero. El valor presente de las 48 mensualidades pagadas por el dueño es:

$$VPA_{0.0073\,48} = \frac{883.71}{0.0073}\left[1 - \frac{1}{(1.0073)^{48}}\right] = 35\,681.66$$

El valor presente de la deuda hipotecaria después de cuatro años de pago es igual al monto original menos el valor presente de los pagos:

$$100\,000 - 35\,681.66 = 64\,318.34$$

En cuatro años esta cantidad vale:

$$VF_{4\text{ años}} = 64\,318.34\,(1.0073)^{48} = 91\,156.23$$

Método 3

Como fecha focal seleccionamos el año cuatro (mes 48). Con este enfoque el valor futuro de los 48 pagos es:

$$VFA_{0.0073\,48} = 883.71\left[\frac{(1.0073)^{48} - 1}{0.0073}\right] = 50\,570.43$$

Mientras tanto, el valor futuro de la deuda original después de 48 meses es:

$$VF_{\text{hipoteca}} = 100\,000\,(1.0073)^{48} = 141\,726.67$$

Al restar del valor de la deuda el valor de los pagos obtenemos el saldo a favor del acreedor (el valor de la hipoteca):

$$141\,726.67 - 50\,570.43 = 91\,156.23$$

Respuesta: El comprador de la casa tendrá que asumir una deuda de 91 156.23 Udis.

En la calculadora financiera tenemos dos métodos para llegar a la respuesta. Se supone que el lector acaba de resolver el ejemplo 1 y no cambió nada en la calculadora:

1. Ponemos $N = 48$ y, pulsando la tecla *VF*, obtenemos la respuesta: 91 156.19. Es lo que queda por pagar después de efectuar los 48 pagos mensuales.
2. Alternativamente, pulsamos la tecla OTRO y AMRT, introducimos 48 en NO.P y al pulsar la tecla BAL obtenemos la respuesta: 91 156.19.

Así, el saldo de la deuda es lo mismo que el valor futuro de la deuda después de efectuar *n* pagos.

Otro ejemplo ayudará a consolidar la metodología:

EJEMPLO 2

Un automóvil cuesta $70 000. El enganche es de $20 000. La tasa de interés aplicable es de 48%, compuesta mensualmente. El comprador tiene que hacer 24 pagos mensuales de $3 279.34 cada uno. Después de un año de pagos, ¿qué porcentaje de su deuda habrá pagado el comprador?

$$a = 3\,279.34, \quad R = 0.04 \text{ mensual}, \quad n = 12, \quad \text{la deuda original} = 50\,000.$$

Solución: Seleccionamos como fecha focal el periodo 12. El valor futuro de las 12 mensualidades es:

$$VFA_{0.0412} = 3\,279.34\left[\frac{(1.04)^{12} - 1}{0.04}\right] = 49\,274.75$$

Mientras tanto, el valor futuro de la deuda original después de 12 meses es:

$$VF_{\text{deuda}} = 50\,000\,(1.04)^{12} = 80\,051.6$$

$$\text{Saldo} = VF_{\text{deuda}}\, VF_{\text{anualidades}} = 80\,051.6 - 49\,274.75 = 30\,776.86$$

El saldo constituye 61.55% del valor de la deuda original, por lo que los derechos adquiridos por el deudor son 38.45% del monto prestado.

Respuesta: Después de un año el comprador habrá pagado 38.45% de su deuda.

El *número de pagos* en una amortización y la *tasa de interés* pueden calcularse con base en la fórmula del valor futuro de una anualidad o con la calculadora financiera.

Descomposición del pago periódico en interés y la amortización

Al tratar el saldo de la deuda como una ecuación en diferencias podemos derivar la fórmula para el saldo en cualquier momento, y además descomponer el pago periódico en dos componentes: el interés del periodo y la amortización.

El saldo de la deuda en cualquier momento t es el saldo del periodo anterior aumentado por el interés menos el pago del periodo:

$$P_t = (1+R)P_{t-1} - a$$

donde P_t es el saldo en el periodo t,
P_{t-1} es el saldo de periodo anterior,
a es el pago periódico.

La solución de esta ecuación es: $P_t = \frac{a}{R} + \left(P_0 - \frac{a}{R}\right)(1+R)^t$

Al reordenar los términos podemos presentar el saldo como la diferencia entre el valor futuro de la deuda original y el valor futuro de los pagos periódicos

$$P_t = \underbrace{P_0(1+R)^t}_{\text{Valor futuro de la deuda}} - \underbrace{\frac{a}{R}\left[(1+R)^t - 1\right]}_{\text{Valor futuro de los pagos}}$$

La fórmula del saldo permite calcular el saldo de la deuda en cualquier periodo t. En el ejemplo 1, el saldo después de cuatro años es:

$$P_{48} = \frac{883.71}{0.0073} + \left(100\,000 - \frac{883.71}{0.0073}\right)(1.0073)^{48} = 91\,156.23$$

En el último periodo, n, el saldo es igual a cero. La deuda se amortizó totalmente.

$$P_n = 0 = (1+R)^n P_0 - \frac{a}{R}\left[(1+R)^n - 1\right]$$

Este resultado nos permite obtener las fórmulas del valor futuro y del valor presente de la anualidad:

$$(1+R)^n P_0 = P_n = \frac{a}{R}\left[(1+R)^n - 1\right]$$

$$P_0 = \frac{a}{R}\left[1 - \frac{1}{(1+R)^n}\right]$$

Al despejar de la última ecuación el pago periódico tenemos:

$$a = \frac{P_0 R}{1 - \frac{1}{(1+R)^n}} = \frac{P_0 R(1+R)^n}{(1+R)^n - 1} = P_0 R + \frac{P_0 R}{(1+R)^n - 1}$$

Esta forma del pago periódico permite separar el interés de la amortización, por lo menos en el primer pago.

$$a = \underbrace{P_0 R}_{\text{interés}} + \underbrace{\frac{P_0 R}{(1+R)^n - 1}}_{\text{amortización}}$$

Por la construcción del segundo término se puede apreciar que la amortización en el primer periodo es muy pequeña. Si sustituimos los datos del ejemplo 1 en la fórmula obtenemos la descomposición del primer pago en el interés y la amortización:

$$883.71 = \underbrace{729.17}_{\text{interés}} + \underbrace{154.54}_{\text{amortización}}$$

Enseguida desarrollaremos las fórmulas para el interés y la amortización en cualquier periodo. Para lograrlo reproducimos la fórmula para el saldo en el periodo t.

$$P_t = \frac{a}{R} + \left(P_0 - \frac{a}{R}\right)(1+R)^t$$

De la fórmula del valor presente de la anualidad tenemos:

$$P_0 - \frac{a}{R} = -\frac{a}{R(1+R)^n}$$

La sustitución de esta expresión en la fórmula del saldo produce:

$$P_t = \frac{a}{R} - \frac{a(1+R)^t}{R(1+R)^n} = \frac{a}{R}\left[1 - (1+R)^{t-n}\right]$$

Para obtener el valor del saldo en el periodo anterior, restamos 1 de t, tanto en el subíndice como en el superíndice.

$$P_{t-1} = \frac{a}{R}\left[1 - (1+R)^{t-1-n}\right]$$

El interés del periodo es igual al saldo del periodo anterior multiplicado por la tasa de interés.

$$\boxed{\text{Interés} = R P_{t-1} = a\left[1 - (1+R)^{t-1-n}\right]}$$

La amortización es el pago menos el interés del periodo.

$$\boxed{\text{Amortización} = a - R P_{t-1} = a(1+R)^{t-1-n}}$$

Al utilizar estas fórmulas para calcular la descomposición del octavo pago en el problema 1, en el interés y la amortización, tenemos

$$\text{Interés} = 883.71\left(1 - 1.0073^{8-1-240}\right) = 721.10$$

$$\text{Amortización} = 883.71(1.0073)^{8-1-240} = 162.61$$

Como era de esperarse, los resultados son idénticos que los de la tabla de amortización del ejemplo 1.

Una revisión cuidadosa de las fórmulas de interés y amortización permite entender mejor la mecánica de la amortización.

Cuando $t = 1$:

$$\text{Interés}(1) = R\,P_0 = a\left[1 - \frac{1}{(1+R)^n}\right]; \qquad \text{Amortización}\,(1) = \frac{a}{(1+R)^n}$$

En préstamos a largo plazo, la expresión $\dfrac{1}{(1+R)^n}$ es muy pequeña, por lo que el interés del primer periodo es poco menor que el pago periódico y la amortización es insignificante.

Cuando $t = n$:

$$\text{Interés}\,(n) = a\left[1 - \frac{1}{1+R}\right]; \qquad \text{Amortización}\,(n) = \frac{a}{1+R}$$

Dado que el valor de la expresión entre corchetes es muy pequeño, la participación del interés en el último pago es minúscula, en cambio la amortización es muy grande.

Resulta muy ilustrativo comparar el proceso de amortización de la misma deuda con tasas de interés diferentes. La tasa de interés más alta concentra la amortización en los últimos periodos. En la siguiente gráfica, 100% representa el pago mensual. El área por arriba de la curva representa el pago de los intereses y el área por debajo, la amortización.

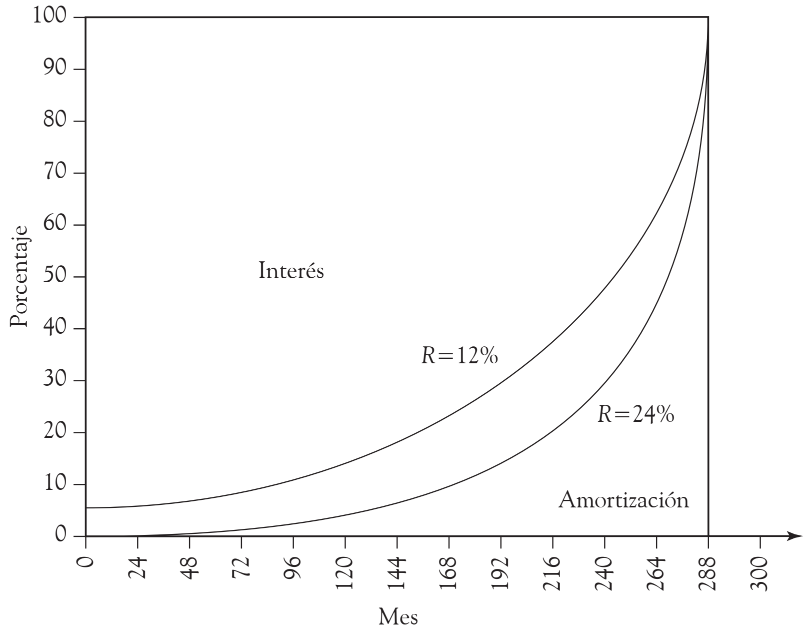
FONDOS DE AMORTIZACIÓN

En la amortización se pretende suprimir una deuda mediante pagos periódicos. Partiendo de un valor presente positivo, el objetivo es llegar a un valor futuro cero mediante una serie de pagos. Es el caso del valor presente de una anualidad.

La acumulación de un fondo es un problema exactamente opuesto. El objetivo es constituir un fondo depositando cantidades establecidas que produzcan intereses a una tasa fija. Partiendo del valor presente cero se pretende llegar a un valor futuro determinado mediante una serie de pagos periódicos. Es un claro ejemplo del valor futuro de una anualidad. Un cuadro que muestra cómo se acumula el fondo se llama *tabla de capitalización* o tabla del fondo de amortización.

Figura 10.1

Descomposición del pago mensual en el interés y la amortización en una deuda hipotecaria a 25 años a 12 y 24%.



EJEMPLO 1

Dentro de un semestre necesitamos $100 000. Nos proponemos depositar una cantidad al fin de cada mes en una cuenta que rinde 36% compuesto mensualmente.

a) ¿Qué monto hay que depositar cada mes?

b) En una tabla muestre cómo se acumula el fondo.

$$R = 0.03 \text{ mensual}, \quad n = 6, \quad VFA = 100\,000, \quad a = ?$$

Solución:

a) Utilizamos la fórmula del valor futuro de la anualidad para calcular el abono mensual:

$$VFA_{0.036} = 100\,000 = \frac{a}{0.03}\left[(1.03)^6 - 1\right] \qquad \Rightarrow \qquad a = 15\,459.75$$

b) Construimos una hoja de cálculo para mostrar cómo se acumula el fondo.

Mes	Depósito mensual	Interés	Total que se suma al fondo	Saldo
1	15 459.75		15 459.75	15 459.75
2	15 459.75	463.79	15 923.54	31 383.29
3	15 459.75	941.50	16 401.25	47 784.54
4	15 459.75	1 433.54	16 893.29	64 677.83
5	15 459.75	1 940.33	17 400.08	82 077.91
6	15 459.75	2 462.34	17 922.09	**100 000.00**
Totales	**92 758.50**	**7 241.50**	**100 000.00**	

Respuesta: Al depositar $15 459.75 cada mes, acumularemos en un semestre $100 000.

En el quinto mes, por ejemplo, se suman al fondo $17 400.08, de los cuales $15 459.75 son un depósito mensual y $1 940.33 son los intereses sobre el saldo del cuarto mes (64 677.83 × 0.03).

En la calculadora financiera seguimos los siguientes pasos:

1. 12 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 6, %IA = 36, VF = 100 000.
2. Al pulsar la tecla PAGO, obtenemos: PAGO = − 15 459.75.
3. Pulsamos la tecla OTRO y AMRT, introducimos 1 en NO.P.
4. Al pulsar las teclas: INT, CTAL, BAL, obtenemos el primer renglón de la tabla.
5. Pulsamos SGTE, y las teclas: INT, CTAL, BAL nos dan el segundo renglón, etcétera.

Si no tenemos tiempo para elaborar la tabla del fondo de amortización pero queremos saber cuál es el total acumulado en el fondo después de cierto periodo podemos utilizar la fórmula para el valor futuro de una anualidad ordinaria.

EJEMPLO 2

Con los datos del ejemplo 1, ¿qué cantidad se habrá acumulado en el fondo al final del quinto mes?

$$a = 15\,459.75, \quad R = 0.03 \text{ mensual}, \quad n = 5, \quad VFA_{0.03,5} = ?$$

Solución: Utilizamos la fórmula del valor futuro de la anualidad para calcular el total acumulado en el fondo después de cinco meses.

$$VFA_{0035} = 15\,459.75\left[\frac{(1.03)^5 - 1}{0.03}\right] = 82\,077.91$$

Respuesta: Al final del quinto mes en el fondo hay $82 077.91.

En la calculadora financiera, en el módulo VDT, introducimos N = 5, y pulsando la tecla VF obtenemos la respuesta: 82 077.91. Alternativamente podríamos haber utilizado el módulo AMRT.

La fórmula del valor futuro de una anualidad ordinaria también permite calcular el número de depósitos en un fondo de amortización y la tasa de interés.

EJEMPLO 3

¿Cuántos depósitos mensuales de $2 000 es necesario realizar para acumular $150 000, si la tasa de interés aplicable es de 30% compuesta mensualmente?

$$a = 2\,000, \quad R = 0.025 \text{ mensual}, \quad VFA_{0.025,n} = 150\,000, \quad n = ?$$

Solución: Utilizamos la fórmula del valor futuro de la anualidad:

$$VFA_{0.025n} = 150 = 2\left[\frac{(1.025)^n - 1}{0.025}\right]$$

$$(0.025)(150/2) = 1.875\,5\,(1.025)^n - 1$$

$$(1.025)^n = 2.875$$

$$n \log(1.025) = \log(2.875)$$

$$n = \log(2.875)/\log(1.025) = 42.768 \text{ meses.}$$

Si hacemos 42 pagos de 2 000, al final del mes 42 tendremos:

$$VFA_{0.025\,42} = 2000\left[\frac{(1.025)^{42} - 1}{0.025}\right] = 145\,679.61$$

Al final del mes 43 esta cantidad valdrá:

$$145\,679.61(1.025) = 149\,321.6$$

Para 150 000 falta un último pago de 678.4.

Respuesta: Para reunir \$150 000 es necesario hacer 42 pagos de \$2 000 y un último pago de \$678.4.

Alternativamente, podemos hacer 41 pagos de \$2 000 y el pago 42 de \$2 661.86.

En la calculadora financiera:

12 NO.P AÑO, MODO FINAL, %IA = 30, PAGO = − 2 000, VF = 150 000.

Al pulsar la tecla N obtenemos: N = 42.76.

La depreciación y la inflación

EJEMPLO 4

Una empresa compra un equipo por \$2.5 millones. Se espera que el equipo dure 10 años y después de ese tiempo su valor de rescate (residual) sea igual a cero. El rendimiento que la empresa puede obtener es de 15%. La depreciación es en línea recta.

a) ¿Cuánto dinero se habrá acumulado en el fondo de amortización de la empresa al cabo de 10 años?

b) ¿Cuál es la tasa máxima de incremento anual del precio del equipo que permitirá a la empresa reemplazarlo por uno nuevo?

Solución: La depreciación en línea recta significa que cada año se aparta una décima parte del valor del equipo (\$250 000) en un fondo especial.

$$n = 10, \quad R = 15\%, \quad a = 250\,000, \quad VFA_{15\%,10} = ?$$

a) El valor del fondo de amortización en 10 años es el valor futuro de una anualidad ordinaria:

$$VFA_{15\%\ 10} = \frac{a}{R}\left[(1+R)^n - 1\right] = \frac{25\ 0000}{0.15}\left[(1.15^{10} - 1)\right] = 5\ 075\ 929.56$$

b) Para saber qué tasa de inflación del equipo es compatible con la posibilidad de renovarlo utilizando solamente el fondo de amortización tenemos que despejar *i* de la siguiente ecuación:

$$2\ 500\ 000(1 + i)^{10} = 5\ 075\ 929.56$$

$$(1 + i)^{10} = 2.0304$$

$$1 + i = 2.0304^{1/10} = 1.0734$$

$$i = 0.0734 = 7.34\%$$

Vale la pena resaltar que la tasa de la inflación anual que acabamos de calcular no se refiere a la inflación en general, sino al incremento de precios del equipo en cuestión.

Respuestas:

a) En 10 años, en el fondo de amortización se habrán acumulado $5 075 929.56.

b) Si el precio del equipo no crece a un ritmo mayor que 7.34% anual, la empresa podrá adquirir un equipo nuevo con su fondo de amortización.

Cuando la tasa de interés es de 15%, lo más probable es que la inflación sea de 10% o más. Si el precio del equipo subiera a un ritmo anual de 10%, en 10 años éste costaría: $2\ 500\ 000(1.1)^{10} = 6\ 484\ 356.15$. El dinero acumulado en el fondo de amortización sería insuficiente para comprar el equipo.

En periodos de alta inflación la depreciación en línea recta no permite acumular fondos suficientes para el reemplazo de la maquinaria. Esto se debe a que la aportación al fondo es constante en términos de pesos corrientes, es decir, decreciente en términos de pesos constantes.

Existen dos soluciones para este problema:

1. Permitir una depreciación acelerada.
2. Permitir aumentar las contribuciones anuales al fondo de amortización de acuerdo con la inflación.

EJEMPLO 5

Supongamos que la ley permite depreciar el equipo del ejemplo 4 en cinco años, a pesar de que dura 10 años. ¿Cuál es el valor del fondo de amortización después de 10 años cuando sea necesario reemplazar el equipo?

Solución: El valor futuro de cinco pagos de 500 000 es:

$$VFA_{5\,15\%} = \frac{500\ 000}{0.15}\left(1.15^5 - 1\right) = 3\ 371\ 190$$

Después de cinco años adicionales esta cantidad será de:

$$3\,371\,1906 \times (1.15)^5 = 6\,780\,668.49$$

Respuesta: Con la depreciación acelerada la empresa reunirá una cantidad ligeramente superior a la necesaria para comprar el equipo cuyo precio sube 10% anual.

EJEMPLO 6

Supongamos que la ley permite aumentar la depreciación cada año un porcentaje igual al de la inflación. Se supone que durante los siguientes 10 años la inflación anual promedio será de 10%. ¿Cuál es el valor del fondo de amortización después de 10 años cuando sea necesario reemplazar el equipo?

Solución: En esta ocasión se trata del valor futuro de una anualidad con pagos crecientes a una tasa constante: $n = 10$, $R = 15\%$, $g = i = 10\%$, $a_1 = 250\,000$, $VFA_{15\%,10} = ?$

$$VFA = \frac{a_1}{R-g}\left[\left(1+R\right)^n - \left(1+g\right)^n\right] = \frac{250\,000}{0.15-0.1}\left(1.15^{10} - 1.1^{10}\right) = 7\,259\,076.38$$

Respuesta: Si la empresa puede aumentar la depreciación a un ritmo igual a la inflación reunirá una cantidad superior a la necesaria para comprar el equipo.

Incrementar las cantidades de acuerdo con la inflación se llama *indexación* o *indización*.

El ejemplo 6 ilustra un fenómeno en el que, con una indización de 100%, la inflación puede beneficiar a las empresas, por lo menos en algunos aspectos.

Fondos de amortización con aportaciones crecientes

El ejemplo 6 muestra un fondo de amortización con las aportaciones crecientes a un ritmo constante igual a la tasa de la inflación (gradiente geométrico). Resolveremos otro ejemplo en el cual las aportaciones crecen en una cantidad fija (gradiente aritmético).

EJEMPLO 7

Una empresa coloca una emisión de bonos a cinco años, con el valor nominal de \$1 000 000.[4] Para asegurar el pago del principal la empresa establece un fondo de amortización (*sinking fund*) cuyas aportaciones crecerán \$40 000 cada año. La tasa de interés que genera el fondo es de 12%.

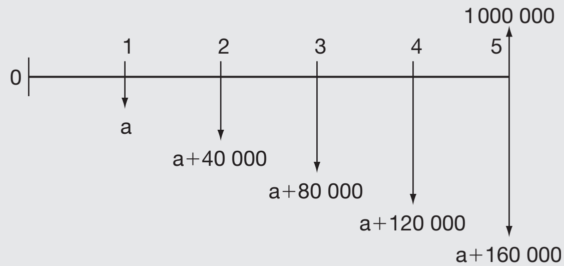
a) Calcule el valor de la primera y de la última aportación.

b) Elabore la tabla del fondo de amortización.

$$VFA = 1\,000\,000, \qquad n = 5, \qquad G = 40\,000, \qquad R = 12\%, \qquad a = ?$$

[4] El valor nominal es el valor futuro, es decir, la cantidad que la empresa tendrá que devolver a los dueños de los bonos dentro de cinco años. En este contexto no importa si los bonos son de cupón cero o si tienen cupones.

Solución:



a) Primero calculamos el valor futuro del gradiente:

$$VF(G)=\frac{40\,000}{0.12}\left[\frac{(1.12)^5-1}{0.12}-5\right]=450\,949.12$$

Restamos el valor futuro del gradiente del valor futuro de la deuda:

$$1\,000\,000-450\,949.12=549\,050.88$$

Despejamos el pago básico de la fórmula del valor futuro de una anualidad simple:

$$549\,050.88=\frac{a}{0.12}\left(1.12^5-1\right)\qquad\Rightarrow\qquad a=86\,425.95$$

La primera aportación es de $86 425.95.

La última aportación es de 86 425.95 + (4)40 000 = $246 425.95.

b) Utilizamos Excel para elaborar el cuadro de capitalización.

Año	Pago anual	Interés	Total que se suma al fondo	Saldo
1	86 425.95		86 425.95	86 425.95
2	126 425.95	10 371.11	136 797.06	223 223.01
3	166 425.95	26 786.76	193 212.71	416 435.73
4	206 425.95	49 972.29	256 398.24	672 833.96
5	246 425.95	80 740.08	327 166.03	999 999.99
Totales	**832 129.75**	**167 870.24**	**999 999.99**	

Que falte un centavo para un millón se debe a los errores de redondeo.

Tasa de interés de un fondo de amortización

EJEMPLO 8

Un banco le dice a su cliente que, si hace 24 pagos mensuales de $1 000, acumulará un fondo de $30 000 ¿Qué tasa de rendimiento ofrece el banco?

$$a=1\,000,\quad VFA_{R,24}=30\,000,\quad n=24,\quad R=?$$

Solución: Utilizamos la fórmula del valor futuro de la anualidad:

$$VFA_{R24} = 30\ 000 = 1\ 000\left[\frac{(1+R)^{24} - 1}{R}\right]$$

Resulta evidente la imposibilidad de despejar R en esta ecuación. Podemos iniciar un procedimiento iterativo o usar algún paquete matemático o financiero.

Primero utilizaremos la calculadora financiera:

12 NO.P AÑO, MODO FINAL, N = 24, PAGO = 1000, VF = 30000

Al pulsar la tecla, %IA obtenemos: %IA = 22.62.

Respuesta: El banco ofrece un rendimiento anual de 22.62%.

Al utilizar MathCAD podemos calcular la tasa mensual:

$VFA := 3\ 000$ $\quad a := 1\ 000$ $\quad n := 24$ $\quad R := 0.01$

Given

$$VFA = \frac{a}{R}\left[(1+R)^{n} - 1\right]$$

Tasa: = Find(R)

Tasa: = 0.018854

La tasa mensual de 1.88% equivale a una tasa anual (nominal) de 22.62%.

Se cree que el planteamiento presentado arriba se explica por sí mismo. Algo que puede despertar dudas es por qué dimos un valor concreto a la tasa de interés (R = 0.01). Este tipo de valor inicial se llama *valor semilla*. Es útil para que el algoritmo tenga un punto de partida que no esté muy alejado del resultado verdadero.

Si para comprobar sustituimos la tasa de interés encontrada por la computadora en la fórmula del valor presente de la anualidad, obtendremos un resultado exacto de 30 000.

Con la hoja de cálculo Excel es necesario construir un modelo; lo reproducimos a continuación:

	A	B
1	*VFA* (importe del préstamo)	$= \$B\$2\left(\frac{(1+\$B\$3)^{\$B\$4} - 1}{\$B\$3}\right)$
2	*a* (pago)	1 000.00
3	*R* (interés)	0.0125
4	*n* (plazo)	24.00

En la celda B1 introducimos la fórmula del valor futuro de la anualidad utilizando, en lugar de los nombres de las variables, las referencias a las celdas correspondientes. En la celda B3 ponemos 0.0125 como "valor semilla" de la tasa de interés buscada.

Después, en el menú Herramientas, elegimos Buscar objetivo. Aparece una tabla semejante a esta:

Definir la celda	\$B\$1
Con el valor	30 000
Cambiando la celda	\$B\$3

La computadora busca el valor de la tasa de interés (celda B3) que, sustituida en la fórmula de la celda B1, producirá el resultado deseado (30 000). Al apretar el botón Aceptar en la celda B3 aparece el valor 0.018854, que es la tasa de interés mensual buscada.

FÓRMULAS DEL CAPÍTULO

Saldo en el periodo t	Interés en el periodo t
$P_t = \frac{a}{R} + \left(P_0 - \frac{a}{R}\right)(1+R)^t$	$RP_{t-1} = a\left[1-(1+R)^{t-1-n}\right]$
Amortización en el periodo t	Saldo en el periodo t de una deuda de n pagos
$a - RP_{t-1} = a(1+R)^{t-1-n}$	$P_t = \frac{a}{R}\left[1-(1+R)^{t-n}\right]$

Términos clave

Abono a capital (amortización)
Amortizar
Derechos del deudor
Fondo de amortización
Indización (indexación)
Préstamo amortizable
Saldo de la deuda (derecho del acreedor)
Sistemas de amortización con pagos crecientes
Tabla de amortización
Tabla de capitalización

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Se contrata una deuda hipotecaria por 300 000 Udis a 30 años a 8.5%.
   a) Elabore la tabla de amortización para los primeros cinco meses.
   b) Para el mes 240 calcule el valor de los intereses pagados, el valor de la amortización y el saldo insoluto de la deuda.

2. Para comprar una casa se contrató una deuda hipotecaria de $250 000 a 25 años a la tasa de interés de 27%. Después de ocho años la casa se vende mediante el traspaso de la deuda. Calcule el saldo insoluto de la deuda que tendrá que asumir el comprador.
3. Se pretende pagar un préstamo de $120 000 a 30% mediante pagos mensuales de $4 000. ¿Cuántos pagos se requieren para saldar la deuda? Ajuste el último pago al alza para que la extinción de la deuda sea completa.
4. Un préstamo de $140 000 será liquidado mediante ocho pagos trimestrales de $23 000. ¿A qué tasa de interés se contrató el préstamo?
5. Una deuda de $300 000 contratada a 28% debe amortizarse mediante 15 pagos trimestrales. Cada pago será $3 000 mayor que el anterior.
   a) Calcule el valor del primer pago.
   b) Elabore la tabla de amortización de la deuda.
6. Un préstamo de $950 000 a cinco años a 23% debe amortizarse mediante pagos mensuales. Cada semestre el valor de la mensualidad aumentará $4 000. Calcule el valor de las mensualidades del primer semestre y del último.
7. Un préstamo de $350 000 a tres años con una tasa de 17% tiene que pagarse mediante cuotas trimestrales que crecerán 7% cada trimestre.
   a) Calcule el valor del primer pago.
   b) Elabore la tabla de amortización de la deuda.
8. Un préstamo de $600 000 a siete años con una tasa de 20% tiene que pagarse mediante cuotas mensuales que crecerán 15% cada año. Calcule el valor del primer pago (el pago base) y del último.
9. Al final de cada mes un trabajador deposita 1 000 Udis en su cuenta de retiro voluntario que tiene un rendimiento garantizado de 5% anual.
   a) Muestre en una tabla la acumulación del fondo durante los primeros ocho meses.
   b) Calcule el saldo del fondo después de 15 años.
10. Una empresa emite bonos a cuatro años, con el valor de redención de $5 000 000. Las cláusulas del bono prevén la creación de un fondo de amortización con aportaciones semestrales que crecen $70 000 cada semestre. El fondo genera un rendimiento de 10%.
    a) Calcule el valor de la primera y de la última aportación.
    b) Elabore la tabla del fondo de amortización.

CAPÍTULO 11

Matemáticas bursátiles: acciones y bonos cupón cero

Objetivos del aprendizaje

Después de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

- Apreciar las funciones económicas del sistema financiero.
- Distinguir entre el mercado de dinero y el mercado de capitales.
- Entender el papel económico del rendimiento sobre los activos financieros.
- Conocer las tres fuentes del rendimiento.
- Calcular la ganancia de capital de una inversión en acciones.
- Transformar el rendimiento a plazo en un rendimiento a otro plazo distinto, tanto en términos nominales como en términos efectivos.
- Tomar en cuenta el impacto de las comisiones sobre el rendimiento neto.
- Calcular el costo de transacción en términos porcentuales.
- Tratar el dividendo que se recibe antes de la fecha de venta de la acción.
- Conocer los criterios de clasificación de los instrumentos de deuda.
- Calcular el descuento y el rendimiento de los Cetes.
- Calcular el precio de venta antes de vencimiento y el rendimiento del periodo de tenencia.
- Establecer la relación del precio del bono con la tasa de interés de mercado.
- Calcular el precio y el rendimiento al vencimiento de los bonos a plazos más largos que un año.

INTRODUCCIÓN

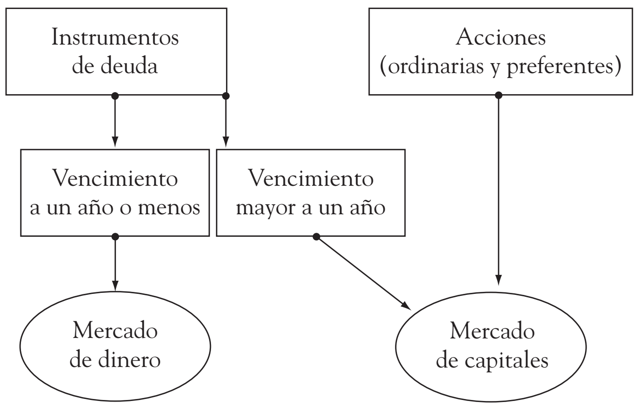
El mercado de valores es una de las instituciones fundamentales del sistema financiero. Como otras instituciones financieras, el mercado de valores constituye una importante fuente de financiamiento para las empresas privadas, públicas y el gobierno. Al mismo tiempo el mercado de valores proporciona numerosas alternativas de inversión, ahorro y manejo de excedentes de liquidez.

En términos generales, el sistema financiero es un intermediario entre las entidades económicas con un exceso de ahorro y las entidades con un déficit de ahorro. Para desempeñar este papel, las instituciones financieras crean *activos financieros*. Éstos representan los derechos sobre la propiedad. Existe una gran variedad de activos financieros. En este texto utilizaremos el nombre genérico de *títulos* o *valores* (*securities* en inglés). Entre los valores principales tenemos: acciones (ordinarias y preferentes), bonos, certificados, obligaciones y papel comercial. Hablaremos sólo de acciones y bonos.

Los mercados financieros se dividen en mercados de dinero y mercados de capital. En los *mercados de dinero* se negocian instrumentos de deuda con vencimientos menores que un año. En los *mercados de capital* se negocian acciones e instrumentos de deuda con vencimientos mayores que un año.

Figura 11.1

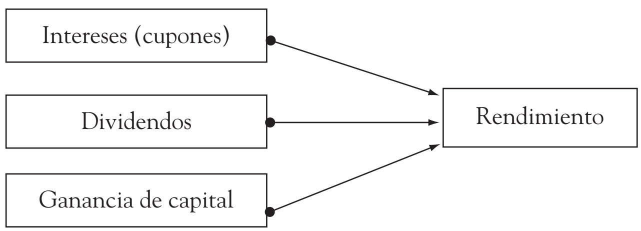
Clasificación de los mercados de valores.



El objetivo de cualquier inversión es obtener ganancia (rendimiento). Existen tres fuentes de rendimiento: intereses, dividendos y ganancias de capital.

Figura 11.2

Tres fuentes del rendimiento de instrumentos financieros.



El *interés* es el pago por el uso de capital. Los *dividendos* constituyen una parte de las utilidades de las sociedades anónimas (corporaciones) que se distribuyen periódicamente entre los accionistas y pueden pagarse en efectivo o en acciones. En Estados Unidos, la mayoría de las empresas pagan dividendos cada trimestre, pero también hay empresas que pagan los dividendos semestrales o anuales. Las empresas fuertes y con buenas perspectivas pagan dividendos bajos porque reinvierten la mayor parte de las utilidades.

La *ganancia de capital* se obtiene al vender un título a un precio superior al precio de compra. Es la principal fuente de ingresos en la bolsa de valores. En la mayoría de los países, las ganancias de capital están exentas de pago de impuesto sobre la renta, mientras que los ingresos por concepto de intereses y dividendos sí son gravables. En la discusión subsiguiente se hace una abstracción del impacto de los impuestos sobre el cálculo de los rendimientos de los diferentes valores.

A continuación analizaremos algunas de las complicaciones que se presentan en el cálculo de los rendimientos de las acciones y de los bonos.

RENDIMIENTO DE LAS INVERSIONES EN ACCIONES

La tasa de rendimiento de una inversión en acciones es la suma de los dividendos y la ganancia de capital dividida entre la inversión original. Utilizaremos los siguientes símbolos:

S_0 valor inicial de la acción o precio de compra (*stock*),
S_t valor final de la acción o precio de venta,
D dividendo pagado durante la tenencia de la acción,
R_S rendimiento de la acción (si el subíndice es numérico, el número indica el plazo de la inversión).

Si la empresa en cuyas acciones invertimos no paga dividendos, la única fuente de rendimiento es la ganancia de capital. La ganancia de capital es la diferencia entre el precio de venta y de compra, dividido entre el precio de compra. La fórmula correspondiente es:

$$R_S = \frac{S_t - S_0}{S_0} = \frac{S_t}{S_0} - 1$$

R_S se refiere al rendimiento durante el periodo de tenencia de la acción. Para poder comparar este rendimiento con el de otros títulos, necesitamos calcular un rendimiento equivalente a un plazo estándar: un mes o un año.

EJEMPLO 1

El 1 de septiembre compramos una acción de Telmex a \$10 y el 10 de octubre la vendemos a \$10.45. ¿Cuál es el rendimiento de nuestra inversión?

$$S_0 = 10, \quad S_t = 10.45, \quad n \text{ (plazo)} = 40 \text{ días}, \quad R_S = ?$$

Solución:

$$R_{S,40\text{días}} = \frac{S_t}{S_0} - 1 = \frac{10.45}{10} - 1 = 0.045 = 4.5\%$$

Respuesta: El rendimiento de la inversión en las acciones de Telmex a 40 días es de 4.5%.

Este rendimiento es incomparable con el rendimiento de otros valores que tienen plazos diferentes. La práctica generalmente aceptada es anualizar los rendimientos. Hay dos maneras de anualizar. El método más común es obtener una tasa anual nominal. La fórmula para la *anualización nominal* es la siguiente:

$$\boxed{R_{\text{anual}} = R_p\left(\frac{360}{p}\right)}$$

p es el periodo (expresado como número de días) para el que tenemos calculado el rendimiento R_p. La división entre p calcula el rendimiento diario y la multiplicación por 360 calcula el rendimiento anual.

En el ejemplo 1 la tasa anual nominal es:

$$R_{\text{anual}} = \frac{R_p}{p} \times 360 = \frac{4.5\%}{40} \times 360 = 40.5\%$$

Podemos generalizar la fórmula de anualización nominal del rendimiento para obtener otra que convierta el rendimiento a un plazo conocido, p, en un rendimiento a un plazo deseado, n:

$$\boxed{R_n = R_p\left(\frac{n}{p}\right)}$$

si deseamos un rendimiento nominal mensual, por ejemplo, $n = 30$.

En el ejemplo 1, el rendimiento mensual nominal es:

$$R_{30} = \frac{R_{40}}{40} \times 30 = \frac{4.5\%}{40} \times 30 = 3.375\%$$

Para calcular el rendimiento anual efectivo utilizamos la siguiente fórmula:

$$\boxed{R_{\text{anual}} = \left(1 + R_p\right)^{360/p} - 1}$$

En el ejemplo 1 el rendimiento anual efectivo es:

$$R_{360} = \left(1 + R_{40}\right)^{360/40} = \left(1.045\right)^{9} - 1 = 0.4861$$

Elevar la expresión entre paréntesis a la potencia de $^1/_{40}$ calcula 1 más el rendimiento diario. Elevar esta expresión a la potencia de 360, calcula 1 más el rendimiento anual. Para calcular la tasa anual en términos porcentuales, necesitamos restar 1 y multiplicar por 100.

$$R_{\text{anual}} = \left[\left(1 + R_{40}\right)^{\frac{1}{40}}\right]^{360} - 1$$

Podemos generalizar la fórmula de anualización efectiva para obtener una fórmula que convierta el rendimiento a un plazo conocido, p, en un rendimiento a un plazo deseado, n:

$$\boxed{R_n = \left(1 + R_p\right)^{n/p} - 1}$$

El rendimiento efectivo mensual es:

$$R_{30} = \left(1 + R_{40}\right)^{30/40} - 1 = 1.045^{0.75} - 1 = 0.0336 = 3.36\%$$

EJEMPLO 2

Un Cete a 91 días rinde 5.3%:

a) Calcule el rendimiento anual nominal,

b) Calcule el rendimiento anual efectivo.

$$R_{91} = 5.3\%, \quad R_{360} = ?$$

Solución:

a) $R_{360} = \dfrac{R_{91}}{91} \times 360 = \dfrac{5.3\%}{91} \times 360 = 20.97\%$

b) $R_{360} = \left(1 + R_{91}\right)^{360/91} - 1 = \left(1.053\right)^{3.956} - 1 = 0.2267 = 22.67\%$

Respuesta: El rendimiento anual nominal del Cete es de 20.97% y el rendimiento efectivo es de 22.67%.

Para comprobar este resultado utilizaremos el módulo CNVI de la calculadora financiera: %NOM = 20.967, P = 360/91 = 3.956.

Al pulsar la tecla %EFE, obtenemos la respuesta: 22.667%.

Podemos comparar el rendimiento anual nominal con rendimientos anuales nominales de otros instrumentos financieros. También se puede equiparar el rendimiento anual efectivo con otros rendimientos efectivos o con la tasa de inflación.

La comisión aumenta el precio efectivo de compra y reduce el precio efectivo de venta.

Los rendimientos que calculamos hasta este momento son, hasta cierto punto, teóricos (en el papel). Normalmente las transacciones en la bolsa se efectúan a través de los intermediarios, y éstos cobran comisiones. Supongamos que la comisión, tanto por el concepto de compra como por el de venta, es de 1.7% sobre el valor de la transacción.

Antes de calcular el rendimiento es necesario modificar los precios, el inicial y el final.

EJEMPLO 3

Con los datos del ejemplo 1 calcule el rendimiento de la inversión a 40 días en las acciones de Telmex, si nuestra casa de bolsa nos cobra una comisión de 1.7% tanto a la compra como a la venta.

$$S_0 = 10, \quad S_t = 10.45, \quad n \text{ (plazo)} = 40 \text{ días}, \quad \text{comisión} = 1.7\%, \quad R_S = ?$$

Solución: Primero calculamos los precios de compra y venta después de la comisión:

$$S_0 = 10(1.017) = 10.17, \quad S_t = 10.45(1 - 0.017) = 10.2724$$

$$R_{40} = \frac{S_t}{S_0} - 1 = \frac{10.2724}{10.17} - 1 = 0.0101 = 1.01\%$$

Respuesta: Después de deducir las comisiones de la casa de bolsa, nuestra inversión en las acciones de Telmex a 40 días rinde apenas 1.01%.

Al anualizar este rendimiento tenemos:

Nominal: $$R_{360} = \frac{R_{40}}{40} \times 360 = \frac{1.01\%}{40} \times 360 = 9.0575\%$$

Efectiva: $$R_{360} = \left(1 + R_{40}\right)^{\frac{360}{40}} - 1 = \left(1.0101\right)^9 - 1 = 0.0943 = 9.43\%$$

Un rendimiento anual efectivo de 9.43% es muy mediocre y posiblemente negativo en términos reales si la tasa de inflación anual resulta más alta.

Recientemente se estableció la costumbre de cobrar la comisión por una *vuelta completa*, es decir, la compra y la venta de un activo. En el caso de México, se cobra una comisión de

1.7% más el IVA (sobre la comisión). En este caso, la comisión total es: 1.7(1.15) = 1.955%. Si la comisión se cobra sólo una vez, en el momento de venta, el rendimiento es castigado mucho menos. En este caso el rendimiento anualizado nominal sería:

$$R = \left(\frac{10.45 - 1.955\%}{10} - 1\right)\frac{360}{40} = 0.2211 = 22.11\%$$

El ejemplo 3 ilustra que, para los inversionistas que tienen *altos costos de transacción*, las operaciones de compra y venta frecuentes son contraproducentes. Estos inversionistas, si no pueden negociar una comisión más baja, deben invertir a plazos más largos, de manera que el costo de las comisiones pese menos en el cálculo de las tasas de rendimiento. Otra solución es invertir en sociedades de inversión de renta variable, que pueden ajustar sus carteras frecuentemente sin incurrir en altos costos de transacción.

Para calcular el *costo de transacción*, en términos porcentuales, suponemos que se compra y vende la acción al mismo precio: $10. En este caso la comisión con el IVA es de $0.1955. ¿Cuál es la pérdida en esta operación?

$$\left(\frac{10 - 0.1955}{10} - 1\right) \times 100 = -1.955\%$$

El costo de transacción es de 1.955% en una vuelta completa. Una persona que vende y compra acciones en promedio cada 40 días tendría un costo anual de transacción de:

$$1.955\left(\frac{360}{40}\right) = 17.595\%$$

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

El 15 de diciembre de 2004 se compra una acción X a $45. El 20 de abril de 2005 se vende a $58. Calcule el rendimiento anualizado nominal de la inversión en la acción, si la casa de bolsa cobra una comisión de 1.7% más el IVA de 15% (el IVA se cobra sobre la comisión).

Respuesta: 75.34%.

CONTRIBUCIÓN DE LOS DIVIDENDOS AL RENDIMIENTO

Cuando la empresa paga dividendos, el cálculo de la tasa de rendimiento de la inversión depende del momento en que se recibe el dividendo. El caso más sencillo es cuando el dividendo se recibe en el momento de venta de la acción, entonces el dividendo se suma simplemente a la ganancia de capital y se divide entre la inversión inicial. La fórmula correspondiente es la siguiente:

$$R_S = \frac{(S_t - S_0) + D}{S_0}$$

EJEMPLO 1

Se compra una acción a \$10 y después de seis meses se vende a \$12. Antes de la venta, el inversionista recibe un dividendo semestral de \$0.5. ¿Cuál es el rendimiento de la inversión?

$$S_0 = 10, \quad S_t = 12, \quad n = 180 \text{ días}, \quad D = 0.5, \quad R_S = ?$$

La línea de tiempo del ejemplo 4 tiene la siguiente forma:

Solución:

$$R_{180} = \frac{S_t + D - S_0}{S_0} = \frac{12 + 0.5 - 10}{10} = 0.25 = 25\%$$

Respuesta: El rendimiento semestral de la inversión, junto con el dividendo, es de 25%. 25% semestral equivale a 50% anual en términos nominales. La tasa anual efectiva es:

$$R_{360} = \left(1 + R_{180}\right)^{360/180} - 1 = \left(1.25\right)^2 - 1 = 0.5625 = 56.25\%$$

El rendimiento parece muy alto. Sin embargo, la anualización no sirve para pronosticar la ganancia anual, sino para comparar el rendimiento de la acción con el rendimiento de otros instrumentos financieros. La ganancia de capital es un evento de una sola vez. La acción que sube en un semestre puede bajar en el siguiente, ocasionando una pérdida de capital.

Cuando el pago del dividendo no coincide con el momento de venta de la acción, existen dos métodos para calcular el rendimiento de la inversión en la acción. El primer método consiste en anualizar el rendimiento por concepto de dividendo y sumarlo al rendimiento anualizado por concepto de ganancia de capital.

EJEMPLO 2

El 1 de septiembre de 2004 compramos una acción de Telmex a \$10 y el 30 de enero del año siguiente la vendemos a \$11.20. La empresa paga el dividendo semestral de \$0.5 el día 30 de diciembre. ¿Cuál es la tasa de rendimiento nominal y efectiva de nuestra inversión?

$$S_0 = 10, \quad S_t = 11.2, \quad n = 151 \text{ días}, \quad D = 0.5, \quad R_S = ?$$

Solución: Primero calculamos la ganancia de capital:

$$R_{151} = \frac{R_t}{R_0} - 1 = \frac{11.2}{10} - 1 = 0.12 = 12\%$$

Doce por ciento en un periodo de 151 días equivale a un rendimiento anual:

Nominal: $\frac{12\%}{151}360 = 28.61\%$

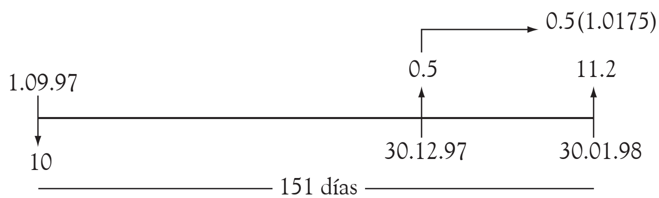
Efectivo: $1.12^{360/151} - 1 = 0.31 = 31\%$

Un dividendo semestral de \$0.5, al tomar como base el precio inicial de la acción, representa un rendimiento anual nominal de 10% y un rendimiento anual efectivo de 10.25%.

Para obtener el rendimiento anual, sumamos los rendimientos por concepto de ganancia de capital y por concepto de dividendo.

Respuesta: El rendimiento anualizado nominal de la acción es de 38.61%, y el efectivo es de 41.25%.

Una manera alternativa de incluir el dividendo en el rendimiento de la inversión en acción es, utilizando la tasa libre de riesgo, llevar el valor del dividendo al futuro, al día de venta, y sumar el valor futuro del dividendo al precio de venta de la acción. Una línea de tiempo permite visualizar el problema:



En el ejemplo 2 el dividendo se recibe 30 días antes de la venta de la acción. Si la tasa libre de riesgo es de 21%, el valor futuro del dividendo es:

$$0.5\left(1 + \frac{0.21}{12}\right) = 0.5088$$

Al sumar el valor futuro del dividendo al precio de venta, tenemos:

$$11.2 + 0.5088 = 11.7088$$

Ahora podemos calcular el rendimiento de la inversión en la acción de la manera acostumbrada:

$$\left(\frac{11.7088}{10} - 1\right) \times 100 = 17.0875\%$$

Así, 17.09% en 151 días equivale a 40.74% nominal en escala anual. El rendimiento que obtuvimos con el segundo método es superior al calculado con el método de anualización del rendimiento del dividendo. Este método calcula el *rendimiento real* que toma en cuenta el hecho de que al inversionista le tocó el dividendo, aun cuando su periodo de tenencia fue menor que 180 días, el periodo que da el derecho al dividendo. El lector puede comprobar que, si el periodo de tenencia de la acción fuese mayor que 180 días, pero menor que 360 días, el rendimiento calculado con el método para llevar el dividendo hacia el día de venta produciría un resultado inferior que el que consiste en anualización del rendimiento del dividendo.

Este es un buen momento para resaltar una función muy útil de la calculadora financiera HP-17B II. Esta función permite calcular el número de días de entre dos fechas diferentes.

En el menú principal pulsamos la tecla CALE y después CALC. Aparece el siguiente menú:

FECH1	FECH2	DÍAS	360D	365D	HOY

El formato de la fecha es: DD.MMAAAA (día, mes año). La fecha 1 de septiembre de 2004 se introduce como 1.092004 FECHA1. Después introducimos 30.012005 (30 de enero de 2005) y pulsamos la tecla FECHA2.

Cada vez que introducimos la fecha, la calculadora confirma nuestra entrada en la pantalla y además muestra el día de la semana. Después de introducir la primera FECHA, por ejemplo, la pantalla dice: FECHA1 = 01.09.2004 MIE.

Ahora, al pulsar la tecla DÍAS, obtenemos: DÍAS REALES = 151.0.

Si pulsamos la tecla 360D, la calculadora nos muestra: 360 DÍAS = 149. Esto significa que en el formato del año comercial de 360 días, nuestro periodo es de tan sólo 149 días.

Si pulsamos la tecla 365D, en la calculadora aparece: 365 DÍAS = 151. Esto significa que en el formato del año de 365 días nuestro periodo es de 151 días.

Aun cuando en el ejemplo 2 se utilizó el año real, se recomienda al lector utilizar siempre el año de 360 días, a menos que las condiciones del contrato estipulen algo diferente.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

El 21 de septiembre de 1998 se compra una acción a $55. El 30 de diciembre de 1998 la acción paga un dividendo semestral de $4. La acción se vende el 21 de mayo de 1999 a $67. Calcule el rendimiento anualizado de la inversión en la acción con los dos métodos, si la tasa de interés libre de riesgo es de 18%. (Utilice el año de 360 días.)

Respuestas: *a*) 47.27%; *b*) 44.41%.

BONOS DE CUPÓN CERO

Un *bono* es una obligación de deuda emitida por el gobierno o por una empresa con vigencia a largo plazo: de 10 a 30 años. Una *nota* es una obligación de deuda a plazo más corto: de uno a 10 años. Un *certificado* es un instrumento de deuda a corto plazo: menor que un año. Un ejemplo típico es el *Treasury Bill* (*T-Bill*) en Estados Unidos o el *Cete* (Certificado de Tesorería) en México.

Existe una gran variedad de bonos, obligaciones, notas y certificados.

- *Bonos nominativos* (o registrados): se registran con el nombre del dueño y su venta requiere el consentimiento del emisor.
- *Bonos al portador*: no están registrados y pueden cambiar de manos fácilmente.
- *Obligaciones fiduciarias* (o garantizadas): están respaldadas por una garantía constituida en un fideicomiso.
- *Obligación hipotecaria*: está garantizada con hipoteca sobre bienes raíces, propiedad del emisor.
- *Obligación quirografaria*: sólo está garantizada por la buena reputación del emisor.

Para simplificar la exposición utilizaremos la palabra *bono* como un concepto genérico que significa cualquier instrumento de deuda con las obligaciones de deudor estipuladas de antemano (o un instrumento de inversión de renta fija para el comprador).

Para fines analíticos, la distinción más importante es entre *bonos con cupones* y *bonos sin cupones*, también conocidos con el nombre de bonos cupón cero o bonos de descuento puro.

Empezaremos con bonos sin cupones que se vuelven cada vez más populares. Se usan los siguientes símbolos:

B_0 precio de compra (el precio descontado),
B_N valor nominal (el valor facial o carátula),
t plazo en días,
R_D tasa de descuento bancario,
R tasa de rendimiento (nominal).

Hay dos maneras de adquirir los bonos de descuento en una subasta: oferta competitiva (*competitive bid*) y oferta no competitiva. Un inversionista que hace una *oferta competitiva* coloca una orden de compra de una cantidad fija de bonos a un precio específico. Una *oferta no competitiva*, en cambio, es una orden incondicional de comprar bonos a un precio que es el promedio de las ofertas competitivas que tuvieron éxito. La oferta no competitiva garantiza la adquisición de los bonos deseados, porque a la hora de asignación de la emisión dichas ofertas tienen prioridad sobre las ofertas competitivas.

El emisor (Tesoro de Estados Unidos o Banco de México), después de restar del monto total de la emisión las ofertas no competitivas y la cantidad que el Banco de México guarda para sí mismo[1] acepta las ofertas en orden de precio descendente hasta la absorción total de la emisión. Los que hacen ofertas competitivas enfrentan dos peligros: pueden pagar demasiado por los bonos o pueden ser excluidos de la subasta porque sus ofertas fueron demasiado bajas.

Los Cetes son los títulos de crédito emitidos por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público a través del Banco de México. El Banco de México mantiene los Cetes en custodia y los vende a las casas de bolsa, bancos comerciales, aseguradoras y tesorerías de las grandes empresas. Los intermediarios financieros pueden vender los Cetes a los inversionistas particulares cobrando una comisión por el servicio. El valor nominal de los Cetes es de $10 y los plazos son 28, 91, 182 y 350 días.

[1] El Banco de México adquiere bonos por su propia cuenta para poder llevar a cabo la política monetaria.

El rendimiento de los Cetes es considerado como la tasa libre de riesgo.

En México el anuncio de la emisión de los Cetes se publica cada jueves y contiene la siguiente información (un ejemplo del periódico del 28 de abril de 2005):

Fecha de emisión:	28 de abril de 2005	
Fecha de vencimiento:	26 de mayo de 2005	
Plazo:	28 días	t
Valor nominal:	$10.00	B_0
Tasa de descuento:	9.54%	R_D
Tasa de rendimiento:	961%	R

La tasa de descuento publicada en el anuncio determina el precio de venta. Si en la subasta los Cetes no se venden a este precio, el Banco de México tiene la opción de bajar el precio de venta (subir la tasa de descuento), o declarar la subasta desierta y retirar los Cetes del mercado. En la mayoría de los casos la demanda de los Cetes rebasa a la oferta y el Banco de México no tiene ningún problema con la colocación.

Dado que un bono de cupón cero no paga intereses en forma de cupones, la única fuente de rendimiento para el inversionista es la ganancia de capital que se obtiene al comprar el bono con descuento y al venderlo al valor nominal. En el caso de los bonos con plazo menor que un año, como los Cetes, se utiliza el descuento bancario. En bonos a plazos más largos se utiliza el descuento compuesto.

El precio de Cete es su valor nominal menos el descuento: $B_0 = B_N - D$.

El descuento se calcula tomando en cuenta la tasa de descuento y el plazo:

$$D = R_D\left(\tfrac{t}{360}\right) \times B_N$$

Así, la fórmula completa del precio del Cete es:

$$B_0 = \underbrace{B_N}_{\substack{\text{Valor}\\ \text{nominal}}} - \underbrace{B_N\,R_D\left(\tfrac{t}{360}\right)}_{\text{Descuento}}$$

Al factorizar el valor nominal, obtenemos la fórmula para calcular el precio descontado (el precio de compra para los inversionistas) del Cete:

$$\boxed{B_0 = B_N\left[1 - R_D\left(\frac{t}{360}\right)\right]}$$

Al sustituir en esta fórmula nuestros valores hipotéticos, tenemos:

$$B_0 = 10\left[1 - 0.0954\left(\frac{28}{360}\right)\right] = 9.9258$$

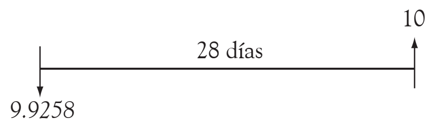
El precio actual del Cete es de \$9.9258.

El descuento es de $D = B_N - B_0 = 10 - 9.9258 = 0.0742$.

Otra manera de calcular el descuento es multiplicar el valor nominal por la tasa de descuento ajustada por el plazo:

$$D = B_N \times \left(R_D \frac{t}{360} \right) = 10 \times 0.00954 \frac{28}{360} = 0.0742$$

La línea de tiempo de la inversión en el Cete es la siguiente:



La tasa de rendimiento al vencimiento a 28 días del Cete es la tasa de descuento que iguala el valor nominal del Cete con su precio:

$$9.9258 = \frac{10}{1 + R_{28}} \qquad \Rightarrow \qquad R_{28} = 0.75\%$$

La tasa nominal de rendimiento anual se obtiene al anualizar el rendimiento a 28 días:

$$R_{360} = R_{28} \left(\frac{360}{28} \right) = 0.75 \times 12.85 = 9.61\%$$

La tasa efectiva de rendimiento anual es:

$$R_{E(360)} = \left(1 + R_{28}\right)^{360/28} - 1 = 1.0075^{12.857} - 1 = 0.101 = 10.1\%$$

Sólo la tasa efectiva puede ser comparada con la inflación anual.

Otra manera de calcular la tasa de rendimiento a 28 días es dividir el descuento entre el precio de bono:

$$R_{28} = \frac{D}{B_0} = \frac{0.0742}{9.9258} = 0.0075 = 0.75\%$$

Existen fórmulas que convierten la tasa de descuento en la tasa de rendimiento, y viceversa. Son las mismas fórmulas que vimos en la introducción y en el capítulo sobre el interés simple.

La fórmula genérica para convertir la tasa de descuento en la tasa de rendimiento es:

$$R = \frac{R_D}{1 - R_D}$$

La misma fórmula, ajustada por el plazo, toma la siguiente forma:[2]

$$R = \frac{R_D}{1 - R_D\left(\frac{t}{360}\right)}$$

Al aplicar esta fórmula a nuestro ejemplo ($t = 28$) tenemos:

$$R = \frac{R_D}{1 - R_D\left(\frac{t}{360}\right)} = \frac{0.0954}{1 - 0.0954\left(\frac{28}{360}\right)} = \frac{0.0954}{0.9926} = 0.0961 = 9.61\%$$

La fórmula genérica para convertir la tasa de rendimiento en la tasa de descuento es:

$$R_D = \frac{R}{1 + R}$$

La misma fórmula, ajustada por el plazo, toma la siguiente forma:

$$R_D = \frac{R}{1 + R\left(\frac{t}{360}\right)}$$

Al aplicar esta fórmula a nuestro ejemplo, tenemos:

$$R_D = \frac{R}{1 + R\left(\frac{t}{360}\right)} = \frac{0.0961}{1 + 0.0961\left(\frac{28}{360}\right)} = \frac{0.0961}{1.0075} = 0.0954 = 9.54\%$$

Para los Cetes a plazos distintos, el cálculo de precio descontado y el rendimiento es exactamente igual.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Cálculo del precio del Cete con base en la tasa de rendimiento

Hasta ahora hemos calculado el precio descontado del Cete utilizando la tasa de descuento bancario. Un método alternativo es con la tasa de rendimiento. En este caso utilizamos el *descuento racional*. La tasa de rendimiento viene dada en el anuncio de la subasta de los Cetes, o la podemos calcular mediante la fórmula que convierte la tasa de descuento a cualquier plazo en la de rendimiento. En nuestro caso el rendimiento del Cete a 28 días es de 9.61%. Al utilizar este dato como base, calculamos el precio del Cete.

[2] En Estados Unidos esta fórmula representa rendimiento equivalente de certificados de depósito (*CD equivalent yield*).

$$B_0 = \frac{B_N}{1 + R\left(\frac{n}{360}\right)} = \frac{10}{1 + 0.0961\left(\frac{28}{360}\right)} = 9.9$$

Obviamente, el resultado es idéntico al calculado con el descuento bancario.

Las principales características de los bonos como Cetes son la ausencia de riesgo y la liquidez. El rendimiento de los Cetes es libre de riesgo, porque el Gobierno federal siempre puede cumplir sus obligaciones en moneda nacional. Puede hacerlo incrementando los impuestos o emitiendo más dinero.

La *liquidez* se refiere a la facilidad de venta de los bonos en el mercado secundario. Si bien es fácil vender los Cetes en cualquier momento, su precio y su rendimiento dependen de la tasa de interés en el momento de venta. Si las tasas de interés bajaron desde el momento de compra de los Cetes, el inversionista realiza un rendimiento mayor que el esperado. Si las tasas subieron, sucede lo contrario.

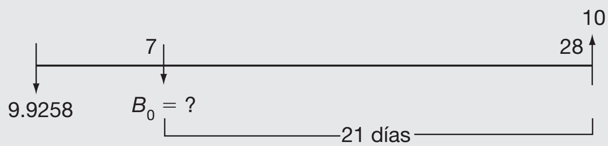
Unos ejemplos aclararán este importante concepto.

Supongamos que después de siete días de tenencia el inversionista desea vender los Cetes a precio de mercado. Este precio depende de la tasa de descuento en el momento de venta y el número de días hasta el vencimiento. Vamos a considerar dos casos:

EJEMPLO 1

Una semana después de la adquisición de los Cetes a 28 días, cuyo precio descontado era de \$9.9258, su tasa de descuento sube a 9.7%. ¿Cuál es el precio de venta de los Cetes en el mercado secundario y cuál es el rendimiento realizado durante los siete días?

Solución: La situación puede apreciarse mejor en un diagrama de tiempo:



El precio de venta después de siete días sigue siendo el valor nominal menos el descuento, pero ahora el descuento se calcula con la nueva tasa y el periodo es el número de días hasta el vencimiento, es decir, el plazo de bono menos el número de días de tenencia: 28 − 7 = 21.

Después de siete días de tenencia y faltando 21 días para su vencimiento, el precio del bono es:

$$B_0^7 = 10\left[1 - 0.097\left(\frac{21}{360}\right)\right] = 9.9434$$

Para calcular el rendimiento del periodo de tenencia dividimos el precio de venta entre el precio de compra:

$$R_7 = \frac{B_0^7}{B_0} - 1 = \frac{9.9434}{9.9258} - 1 = 0.0018 = 0.18\%$$

Este rendimiento se ganó durante siete días. Para anualizarlo es necesario dividirlo entre 7 y multiplicar por 360:

$$R_{360} = R_7\left(\frac{360}{7}\right) = 0.18 \times 51.4286 = 9.12\%$$

Respuesta: Después de siete días de tenencia de los Cetes a 28 días el inversionista los puede vender a $9.9434 cada uno, realizando así un rendimiento del periodo de tenencia de 9.12%

Otra manera de enfocar este problema es desarrollar una fórmula para el precio de venta de un bono después de m días de tenencia:

Sean $n = 28$ el plazo de bono.
$m = 7$ el periodo de entre la compra y la venta de bono (el periodo de tenencia).

Entonces $(n - m)$ son los días que quedan hasta el vencimiento: $28 - 7 = 21$.

Para calcular el precio de venta del bono, utilizamos la siguiente fórmula:

$$B_m = B_N\left[1 - R_D^1 \frac{(n-m)}{360}\right]$$

donde B_m es el precio de venta del bono después de m días de tenencia.
R_D^1 es la tasa de descuento para este tipo de bonos, vigente en el momento de venta.
n es el plazo del bono en días.
m es el número de días de tenencia.

Al sustituir los datos del problema en la fórmula tenemos:

$$B_m = B_N\left(1 - R_D^1 \frac{(n-m)}{360}\right) = 10\left(1 - 0.097\frac{28-7}{360}\right) = 9.9434$$

Al restar el precio de compra del precio de venta, tenemos: $9.9434 - 9.9258 = 0.0176$, que representa la ganancia de capital realizada durante los días de tenencia del bono.

Al dividir esta ganancia entre el precio de compra del bono obtenemos el rendimiento realizado durante los siete días: $0.0176/9.9258 = 0.0018$.

Al anualizar este rendimiento obtenemos: $0.0018 \times (360/7) = 0.0912 = 9.12\%$.

Dado que durante el periodo de tenencia las tasas de descuento subieron, el inversionista que vende sus Cetes después de siete días realiza un rendimiento de 9.12%, menor que el rendimiento que planeaba realizar (9.61%).

El lector puede preguntar: ¿qué sentido tiene vender los Cetes antes del vencimiento y aceptar una ganancia de 9.12%, si manteniéndolos hasta el vencimiento el inversionista tiene un rendimiento garantizado de 9.61%?

Una respuesta podría ser que el inversionista necesita liquidez y tiene que aceptar un menor rendimiento para obtenerla. Otra respuesta es que el inversionista espera que en el futuro las tasas vayan a bajar y quiere invertir en Cetes mientras su rendimiento es alto. Supongamos que en el día de venta de los viejos Cetes, la tasa de descuento de la nueva emisión de los Cetes a 91 días es de 9.9%. Esto equivale a un rendimiento de 10.15%. Si el inversionista compra los Cetes a 91 días fija el rendimiento de su inversión en 10.15%. Si durante este periodo las tasas bajan, el inversionista obtendrá ganancias mayores que la pérdida provocada por la venta prematura de los Cetes a 28 días.

Para saber por qué el inversionista gana si las tasas de descuento bajan, consideramos el siguiente caso:

EJEMPLO 2

Una semana después de la adquisición de los Cetes a 28 días del ejemplo 1, la tasa de descuento de los mismos baja a 9.3%. ¿Cuál es el precio de venta de los Cetes en el mercado secundario y cuál es el rendimiento realizado durante los siete días?

Solución: Para calcular el precio de venta utilizamos la misma fórmula que antes, pero cambiamos la tasa de descuento a 9.3%:

$$B_m = B_N\left(1 - R_D^1\frac{(n-m)}{360}\right) = 10\left(1 - 0.093\frac{28-7}{360}\right) = 9.9458$$

Para calcular el rendimiento anualizado del periodo de tenencia aplicamos la siguiente fórmula:

$$R_h = \left(\frac{B_m}{B_0} - 1\right) \times \frac{360}{m} = \left(\frac{9.9458}{9.9258} - 1\right) \times \frac{360}{7} = 0.1034 = 10.34\%$$

donde R_h es el rendimiento del periodo de tenencia.

Respuesta: Después de siete días de tenencia de los Cetes a 28 días el inversionista puede venderlos a \$9.9458 cada uno, realizando un rendimiento del periodo de tenencia de 10.34%.

Dado que durante el periodo de tenencia las tasas de descuento bajaron, el inversionista que vende sus Cetes después de siete días realiza un rendimiento de 10.34%, mucho mayor que el rendimiento al vencimiento de 9.61%.

Para consolidar la metodología del cálculo de los rendimientos de los Cetes vamos a resolver el siguiente caso.

EJEMPLO 3

El señor López compra un Cete a 182 días con una tasa de rendimiento de 9.8%. Después de 91 días tiene que venderlo, pero en ese momento la tasa de rendimiento de los Cetes a 91 días es de 10.2%.

a) ¿A qué precio puede vender su Cete el señor López?

b) ¿Qué tasa de rendimiento habrá realizado durante el periodo de tenencia?

Solución:

a) Utilizaremos el método de descuento racional:

$$B_0 = \frac{10}{1+0.098\left(\frac{182}{360}\right)} = 9.5279$$

Para calcular el precio de venta en el día 91 debemos tener presente que en el día de venta el Cete del señor López tiene nada más 91 días para su vencimiento.

$$B_0^1 = \frac{10}{1+0.102\left(\frac{91}{360}\right)} = 9.7486$$

B_0^1 es el precio del Cete a 91 días y es el precio al que el señor López puede vender su Cete a 182 con 91 días para su vencimiento.

b) Para calcular el rendimiento realizado durante los 91 días de tenencia del Cete (rendimiento del periodo de tenencia), aplicamos la conocida fórmula:

Si durante el periodo de tenencia de un bono las tasas de interés suben, los que venden el bono antes del vencimiento realizan un rendimiento *menor* que el rendimiento al vencimiento.

$$R_h = \left(\frac{\text{Precio de venta}}{\text{Precio de compra}} - 1\right) \times \frac{360}{m} = \left(\frac{9.7486}{9.5279} - 1\right) \times \frac{360}{91} = 0.0917 = 9.17\%$$

El rendimiento del periodo de tenencia (9.17%) es menor que el rendimiento al vencimiento (9.8%), dado que durante la tenencia del Cete las tasas de interés subieron.

Respuesta: *a*) después de 91 días, el Cete se puede vender a \$9.7486,
b) El rendimiento realizado durante los 91 días de tenencia del Cete es de 9.17%.

Si durante el periodo de tenencia las tasas de interés bajan, el rendimiento del periodo de tenencia es *mayor* que el rendimiento al vencimiento.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

El 1 de junio de 2005 usted compra un Cete a 350 días con el rendimiento de 9.71%. El 15 de junio de 2005 lo vende, cuando la tasa de interés en el mercado secundario para este tipo de instrumentos es de 9.5%. Calcule: *a*) el precio de compra del Cete, *b*) el precio de venta dos semanas después, *c*) el rendimiento del periodo de tenencia.

Respuestas: *a*) \$9.1374, *b*) \$9.1855, *c*) 13.54% anual.

Bonos de cupón cero a plazos mayores que un año

En bonos a plazos más largos que un año se utiliza el método de interés compuesto. Con el interés compuesto la tasa de descuento es exactamente igual a la tasa de rendimiento. Podemos tratarlas como sinónimos.

El emisor establece una tasa de descuento sólo para calcular el precio inicial al que coloca sus bonos en el mercado. Si el mercado no absorbe los bonos a un ritmo esperado, el emisor baja el precio (sube la tasa de descuento). En cambio, si los bonos se venden muy bien, el emisor puede subir su precio (bajar las tasas de descuento y rendimiento). Para apreciar mejor la diferencia entre el interés simple y el interés compuesto, primero veremos un ejemplo donde el plazo es menor que un año, pero se aplica el interés compuesto.

EJEMPLO 4

Un bono de descuento puro con valor nominal de $1 000 y vencimiento en seis meses se vende a $950. ¿Cuál es el rendimiento al vencimiento del bono?

$$B_0 = 950, \quad B_N = 1000, \quad n = 1 \text{ semestre}, \quad R = ?$$

Solución: Cuando se usa el interés compuesto, el rendimiento al vencimiento es la tasa de descuento que iguala el valor presente de valor nominal del bono con su precio. La despejamos de la fórmula del valor presente:

$$B_0 = \frac{B_N}{(1+R)^t}$$

Al sustituir los valores del ejemplo, obtenemos:

$$950 = \frac{1000}{1+R} \quad \Rightarrow \quad R = 5.26\%$$

donde R es la tasa de descuento semestral.

Al anualizar esta tasa tenemos:

Tasa nominal: (2)5.26% = 10.52%

Tasa efectiva: $(1.0526)^2 - 1 = 0.108 = 10.8\%$

Respuesta: La tasa de rendimiento implícita en el precio del bono es de 10.52% anual.

Al resolver el ejemplo 4 utilizamos el interés compuesto. Con este método, la tasa con que se descuenta el valor nominal es la tasa de rendimiento (5.26%). Cuando se usa el descuento bancario, la tasa de descuento es de 5%. Recordemos que la correspondencia de la tasa de descuento con la tasa de rendimiento está expresada en la siguiente relación:

$$\frac{1}{1+R} = 1 - R_D$$

donde R es la tasa de rendimiento al vencimiento, y
R_D la tasa de descuento bancario.

Sustituyendo los datos del ejemplo 1, tenemos:

$$\frac{1}{1+0.0526} = 0.95 = 1 - 0.05$$

La fórmula para calcular el precio descontado de los Cetes no es más que una fórmula de descuento bancario, en la cual se anualiza la tasa de descuento mediante el recurso de dividir dicha tasa por 360 y multiplicarla por el plazo en días del Cete.

En el siguiente ejemplo se utiliza dicha fórmula para calcular la tasa de descuento y la tasa de rendimiento del ejemplo 4.

EJEMPLO 5

Con los datos del ejemplo 4, pero utilizando la fórmula del precio de los Cetes, calcule:

a) La tasa de descuento anual implícita en el precio del bono,

b) La tasa de rendimiento del bono.

$$B_0 = 9\,500, \quad B_N = 1\,000, \quad n = 180 \text{ días}, \quad R_D = ?$$

Solución:

a) Utilizamos la fórmula del precio actual del Cete:

$$B_0 = B_N\left[1 - R_D\left(\frac{t}{360}\right)\right]$$

Al sustituir los valores, tenemos:

$$950 = 1\,000\left[1 - R_D\left(\frac{180}{360}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad R_D = 10\%$$

b) La tasa de rendimiento semestral se obtiene al dividir el descuento entre el precio de compra:

$$R = \frac{D}{B_0} = \frac{50}{950} = 0.0526 = 5.26\%$$

Entonces, 5.26% semestral equivale en términos nominales a 10.52% anual.

Respuesta: La tasa anual de descuento bancario implícita en el precio del bono es de 10% y la tasa de rendimiento es de 10.52%.

El *rendimiento al vencimiento* es la tasa de descuento que iguala el valor nominal del bono (su valor futuro) con el precio del bono (su valor presente).

En el método de cálculo del precio del Cete la tasa de descuento es más baja que la tasa de rendimiento porque el descuento se calcula al tomar como base el valor nominal (valor futuro) en lugar del precio de compra (valor presente).

De aquí en adelante vamos a utilizar sólo el método del interés compuesto.

EJEMPLO 6

Un bono de descuento puro con el valor nominal de $1 000 que vence en cuatro años se vende a $780. ¿Cuál es el rendimiento al vencimiento del bono?

$$B_0 = 780, \quad B_N = 1\,000, \quad n = 4 \text{ años}, \quad R = ?$$

Solución: Despejamos R de la fórmula del precio del bono:

$$780 = \frac{1\,000}{(1+R)^4} \qquad \Rightarrow \qquad R = 6.41\%$$

Respuesta: El rendimiento al vencimiento, implícito en el precio del bono, es de 6.41%.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Un bono de cupón cero a 15 años con valor nominal de $1 000 ofrece un rendimiento al vencimiento de 5.2%: *a*) calcule el precio del bono. Después de un año de tenencia el dueño del bono lo vende a $450, *b*) ¿cuál es el rendimiento al vencimiento en el momento de venta, *c*) calcule el rendimiento del periodo de tenencia.

Respuestas: *a*) 467.48, *b*) 5.87, *c*) −3.74%.

RELACIÓN DEL PRECIO DEL BONO CON LA TASA DE RENDIMIENTO

El rendimiento al vencimiento, implícito en el precio del bono, es la tasa que se calcula con base en el valor nominal (facial) del bono y su precio de mercado. El rendimiento al vencimiento es muy sensible a los cambios en los precios de los bonos.

EJEMPLO 1

Un bono a cinco años con el valor facial de $1 000 se vende a $700. Calcule:

a) La tasa de rendimiento anual implícita en el precio del bono,

b) La tasa de rendimiento si el precio es $600,

c) La tasa de rendimiento si el precio es $800.

$$B_0 = 700, \quad B_N = 1\,000, \quad n = 5 \text{ años}, \quad R = ?$$

Solución:

a) Al aplicar la fórmula del valor presente, tenemos:

$$700 = \frac{1\,000}{(1+R)^5}$$

$$1+R=\left(\frac{1\,000}{700}\right)^{1/5}=1.0739$$

$$R=0.0739=7.39\%$$

b) $B_0=600=\dfrac{1000}{(1+R)^5} \quad \Rightarrow \quad R=0.1076=10.76\%$

c) $B_0=800=\dfrac{1\,000}{(1+R)^5} \quad \Rightarrow \quad R=0.0456=4.56\%$

El ejemplo 1 ilustra una muy conocida regla de las finanzas: cuando baja el precio del bono, su rendimiento sube, y viceversa.

$$B_0\downarrow \quad \Rightarrow \quad R\uparrow$$

$$B_0\uparrow \quad \Rightarrow \quad R\downarrow$$

La tasa con la que se descuenta el valor nominal del bono para obtener su precio representa la tasa de rendimiento desde el punto de vista del inversionista. Desde el punto de vista del emisor, dicha tasa de descuento representa el *costo de capital*. Si para vender un bono es necesario bajar su precio, aumenta el costo de capital para el emisor.

Otra regla básica de finanzas establece que: el precio del bono es más sensible a las variaciones de la tasa de interés mientras más largo sea el plazo del bono.

El siguiente ejemplo ilustra este punto.

EJEMPLO 2

Tenemos dos bonos con el valor nominal de $1 000 cada uno. El plazo del primer bono es de cinco años y del segundo 20 años. La tasa de interés de mercado, aplicable al descuento de los bonos, es de 10%. Calcule:

a) Los precios de los dos bonos.

b) El cambio porcentual en el precio de cada bono si la tasa de mercado sube a 12%.

$$B_0=?,\quad B_N=1\,000,\quad n=5 \text{ y } 20 \text{ años},\quad R=10\%$$

Solución:

a) $R=10\%$

Al utilizar la fórmula del valor presente, tenemos:

$$B_{0,5}=\frac{1\,000}{1.1^5}=620.92 \qquad \text{y} \qquad B_{0,20}=\frac{1\,000}{1.1^{20}}=148.64$$

b) $R=12\%$

$$B_{0,5}=\frac{1\,000}{1.12^5}=567.43 \qquad \text{y} \qquad B_{0,20}=\frac{1\,000}{1.12^{20}}=103.67$$

El cambio porcentual de los precios de los bonos es:

$$\%\Delta B_{0,5} = (567.43 - 620.92)/620.92 = -0.0861 = -8.61\%$$

$$\%\Delta B_{0,20} = (103.67 - 148.64)/148.64 = -0.3025 = -30.25\%$$

Respuesta: Cuando la tasa de interés subió de 10 a 12%, el precio del bono a cinco años bajó 8.61%, mientras que el precio del bono a 20 años bajó 30.25%.

Este resultado es lógico, porque mientras más largo sea el plazo, más tiempo tiene el interés compuesto para actuar.

Los propietarios de los bonos a largo plazo corren un mayor riesgo de pérdida de capital en caso de un aumento de las tasas de interés que los dueños de los bonos a corto plazo.

El ejemplo 2 ilustra el hecho de que los precios de los bonos bajan cuando suben las tasas de interés y los precios de los bonos a largo plazo son más sensibles a los cambios en las tasas de interés. La siguiente tabla resume los resultados para un bono con el valor nominal de \$1 000 a diferentes plazos.

%	B_0 Precio del bono			
	$N = 1$	$N = 5$	$N = 20$	$N = 30$
$R = 10$	909.09	620.92	148.64	57.31
$R = 12$	892.85	567.43	103.67	33.37
$\%\Delta B_0$	–1.78%	–8.61%	–30.25%	–41.75%

Las expectativas de una mayor inflación aumentan de inmediato el rendimiento de los bonos a largo plazo.

La compra de un bono a largo plazo es una apuesta a que las tasas de interés bajen, o por lo menos no suban. Si las tasas de interés suben, los dueños de bonos a largo plazo sufren una fuerte pérdida de capital. En consecuencia, los precios de los bonos a largo plazo son muy sensibles a las expectativas de la inflación. Si por alguna razón el mercado prevé un repunte de la inflación, los tenedores de los bonos a largo plazo los tratan de vender antes de que suban las tasas de interés. Esto baja inmediatamente los precios de dichos bonos y aumenta su rendimiento.

Incluso un pequeño aumento de las tasas de interés genera grandes pérdidas de capital para los dueños de los bonos a largo plazo.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Es muy fácil establecer la relación de la sensibilidad de precio del bono con los cambios en las tasas de interés y el plazo al analizar la derivada del precio del bono con respecto a la tasa de interés.

$$B_0 = \frac{B_N}{(1+R)^N} = B_N(1+R)^{-N}$$

$$\frac{dB_0}{dR} = -N \cdot B_N \cdot (1+R)^{-N-1} = -\frac{N \cdot B_N}{(1+R)^{N+1}}$$

A mayor plazo, mayor es el cambio del precio del bono para cada cambio en la tasa de interés.

$$N \uparrow \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{dB_0}{dR}\right| \uparrow$$

EJEMPLO 3

Calcule la pérdida de capital que sufre el dueño del bono del Tesoro de Estados Unidos a 30 años en un solo día si durante ese día la tasa de interés sube de 5.2 a 5.9%. El valor nominal del bono es de $1000.

$$B_N = 1\,000, \quad n = 30 \text{ años}, \quad R_0 = 5.2\%, \quad R_1 = 5.9\%.$$

Solución:

El precio del bono a 5.2%:

$$B_0 = \frac{1\,000}{1.052^{30}} = 218.54$$

El precio del bono a 5.9%:

$$B_0^1 = \frac{1\,000}{1.059^{30}} = 179.11$$

El cambio porcentual del valor del bono

$$\%\Delta B_0 = \left(\frac{179.11}{218.54} - 1\right) \cdot 100 = -18.04\%$$

Respuesta: Cuando las tasas de interés suben 0.7% el dueño del bono a 30 años sufre una pérdida de capital de 18%.

El ejemplo 3 demuestra que la afirmación de que la inversión en los bonos del Tesoro a largo plazo es de bajo riesgo es más bien una metáfora.

Valuación de bonos

En la medida en que se acerca el vencimiento, el precio del bono tiende hacia su valor nominal. Si entre el momento de compra del bono y su vencimiento las tasas de interés se mantienen constantes, el precio del bono converge hacia su valor nominal en forma lineal.[3]

[3] Esta afirmación es sólo aproximadamente cierta en bonos a corto plazo. Cuando el plazo se alarga la convergencia es curvilínea. En el presente contexto aceptamos esta simplificación para destacar el impacto de los cambios en las tasas de interés sobre la forma de convergencia.

Si después de la compra del bono las tasas de interés para este tipo de instrumentos suben, el valor del bono crece más lentamente de lo que indicaría una trayectoria lineal. Cuando los incrementos de las tasas de interés son pronunciados el valor del bono incluso puede bajar. Si el tenedor del bono lo vendiese antes del vencimiento tendría que absorber una pérdida de capital o un rendimiento del periodo de tenencia menor que el rendimiento al vencimiento. Al tenedor le puede resultar más conveniente esperar hasta el vencimiento.

Si después de la compra del bono las tasas de interés bajan, el valor del bono sube más rápido de lo que indicaría la trayectoria de la tasa de interés constante. El tenedor del bono realiza una ganancia de capital y puede resultarle ventajoso vender el bono antes del vencimiento.

Además de que con el tiempo el precio del bono se acerca a su valor nominal, cada día el precio de un bono varía en relación inversa a los cambios en la tasa de interés. Los precios se ajustan constantemente en función de las condiciones del mercado. Al tenedor del bono no le importa realmente el precio actual. Lo que sí le importa es el precio en el momento de venta, o el precio al vencimiento. Sin embargo, existe la necesidad de valuar bonos incluso cuando no se piensa en venderlos. Una casa de bolsa, por ejemplo, tiene que fijar algún precio de los bonos del cliente cuando le manda su saldo mensual. Para efectos de contabilidad y auditoría, las tesorerías cada mes tienen que fijar el precio de los bonos que poseen. Desgraciadamente no existe un consenso acerca de cómo valuar los bonos durante el periodo de tenencia.

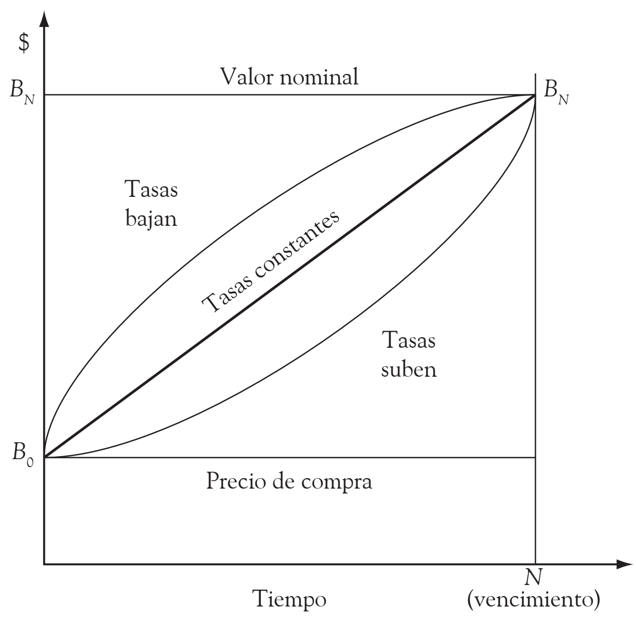
A continuación presentamos los tres métodos de valuación más comunes.

Valuación al mercado

En el caso de títulos muy líquidos, como los Cetes, existe un mercado secundario muy activo donde los bonos se negocian de acuerdo con las condiciones actuales de la oferta y la deman-

Figura 11.3

Convergencia del precio del bono hacia su valor nominal, dependiendo del comportamiento de las tasas de interés.



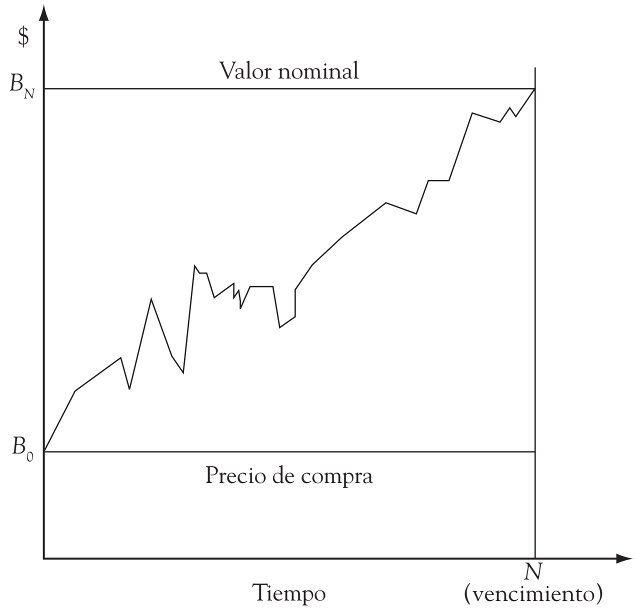


Figura 11.4

Trayectoria del precio del bono según la valuación al mercado.

da. En cada momento el mercado determina tanto el rendimiento como el precio de los bonos a diferentes plazos. Si la casa de bolsa utiliza este método de valuación, en sus saldos mensuales reporta el precio de mercado de los títulos en el momento de corte.

La valuación al mercado es correcta desde el punto de vista metodológico, pero, dada la volatilidad de los mercados modernos, muestra un patrón muy irregular. El precio del bono puede subir o bajar considerablemente, incluso durante un día. Para los fines de contabilidad y auditoría, este método no es el ideal.

Valuación en línea recta

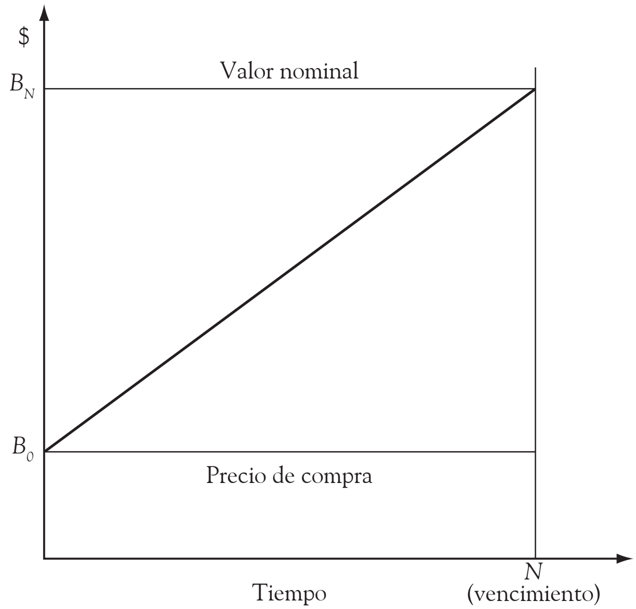
Los contadores prefieren la *valuación en línea recta*. Si el precio de un activo sube de su nivel inicial hasta su valor al vencimiento durante *n* días se supone que el incremento del precio está en proporción directa con los días que faltan para el vencimiento. El valor del título se incrementa cada día en la misma cantidad, independientemente de las condiciones del mercado. Si en 100 días un bono sube un peso, cada día su precio aumenta un centavo. El lector seguramente habrá notado que la valuación en línea recta utiliza el interés simple.

Valuación en curva

A un matemático no le gustaría el método de valuación en línea recta. Dada una tasa de interés, el bono aumenta de valor cada día. En la medida en que aumenta su valor debe ganar más intereses. El método que utiliza el interés compuesto en la valuación es conocido con el nombre de *valuación en curva*. Para aplicarlo es necesario calcular la tasa capitalizada diariamente igual a la tasa de rendimiento del bono capitalizada el número de veces equivalente a 360 dividido entre el plazo del bono.

Figura 11.5

Trayectoria del precio del bono según la valuación en línea recta.



EJEMPLO 4

Un Cete a 91 días se vende con el rendimiento de 21.4%. Calcule:

a) el precio inicial del Cete,

b) la tasa de interés adecuada para la valuación en curva,

c) el valor del Cete después de 30 días, según la valuación en curva.

$$B_N = 10, \quad n = 91 \text{ días}, \quad R = 21.4\%.$$

Solución:

a) $$B_0 = \frac{10}{1 + 0.214\left(\frac{91}{360}\right)} = 9.4868$$

b) $$\left[1 + 0.214\left(\frac{91}{360}\right)\right]^{360/91} = \left(1 + \frac{R}{360}\right)^{360} \Rightarrow R = 0.2085 = 20.85\%$$

c) $$9.4868\left(1 + \frac{0.2085}{360}\right)^{30} = 9.653$$

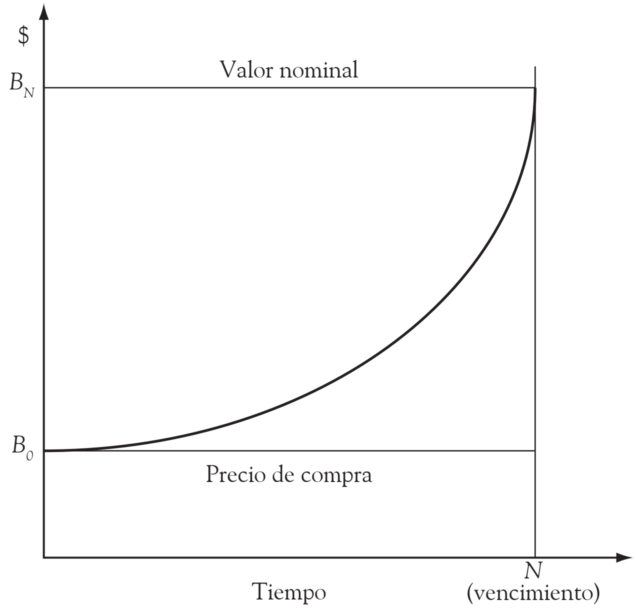


Figura 11.6

Valuación en curva.

Obviamente el valor del bono calculado con el método de valuación en curva es el mismo que el precio calculado según la valuación de mercado, con el supuesto de que las tasas de interés permanecen constantes.

$$\frac{10}{1+0.214\left(\frac{61}{360}\right)} = 9.65$$

De los tres métodos de valuación presentados, la valuación al mercado es el método que mejor refleja la realidad. Sin embargo, si el plazo de los bonos no es demasiado largo y la empresa no tiene la intención de venderlos antes del vencimiento, los métodos de valuación en línea recta y en curva también son adecuados. En la medida en que se alarga el vencimiento, las diferencias entre los tres métodos de valuación se vuelven cada vez más importantes.

Convexidad del precio del bono respecto de las tasas de interés[4]

La relación inversa entre el precio del bono y su rendimiento no es lineal. El precio del bono es más sensible a los movimientos de las tasas de interés cuando éstas bajan que cuando suben. Esta propiedad de los bonos se llama *convexidad*. Si al comenzar de algún nivel la tasa de interés sube, la reducción del precio del bono es menor que el aumento del precio del bono que resulta de una reducción de la tasa de interés de la misma magnitud.

[4] Se puede omitir esta sección sin pérdida de continuidad.

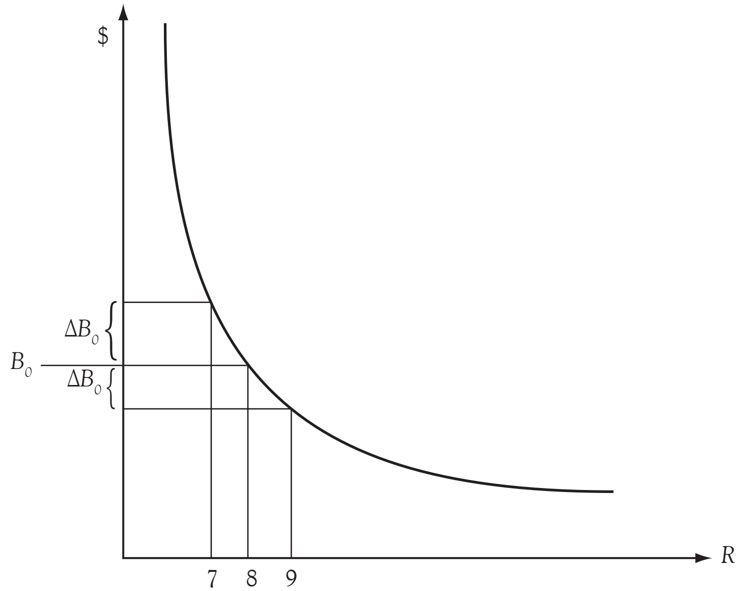


Figura 11.7

La convexidad del precio del bono respecto de la tasa de interés.

Para entender la convexidad es necesario observar las gráficas de los precios de los bonos en función de la tasa de interés, para los bonos con el mismo valor nominal, pero a diferentes plazos.

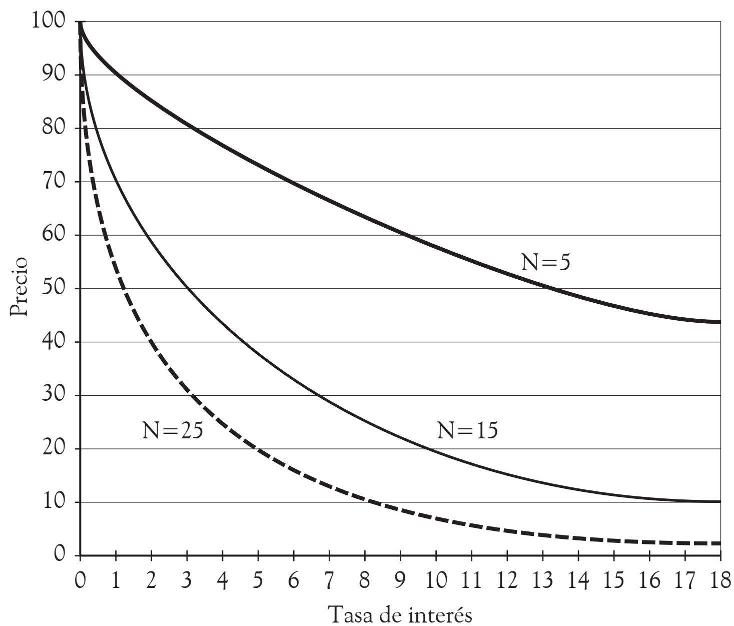


Figura 11.8

La relación entre el precio del bono, su plazo y la tasa de interés.

En la figura 8 se ve claramente que el precio de los bonos es más sensible a los incrementos en las tasas de interés cuando éstas son bajas. En la medida en que aumentan las tasas, el precio de los bonos ya es tan bajo que no puede disminuir mucho. Este fenómeno se observa con mayor claridad en los bonos a largo plazo. Matemáticamente se dice que la primera derivada del precio del bono con respecto a la tasa de interés es negativa, lo que explica la pendiente negativa de las curvas. La segunda derivada, en cambio, es positiva, lo que explica la convexidad de las curvas respecto al origen.

$$B_0 = \frac{B_N}{(1+R)^t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dB_0}{dR} = \frac{-t\,B_N}{(1+R)^{t+1}} < 0$$

$$\frac{d^2B_0}{dR^2} = \frac{t(t+1)\,B_N}{(1+R)^{t+2}} > 0$$

El grado de la convexidad crece junto con el plazo del bono. En el bono a cinco años, cuando la tasa de interés sube de 3 a 4%, el precio del bono baja de 86.26 a 82.19, una reducción de 4.72%. Cuando la tasa sube de 15 a 16%, el precio del bono baja de 49.72 a 47.61, una reducción de 4.24%.

En el bono a 25 años, cuando la tasa de interés sube de 3 a 4%, el precio baja de 47.76 a 37.51, una reducción de 21.46%. Cuando la tasa sube de 15 a 16%, el precio baja de 3.0377 a 2.4465, una reducción de 19.46%.

Se invita al lector a comprobar estos cálculos.

Para profundizar la relación entre el precio del bono, el plazo y las tasas de interés, calcularemos las elasticidades del precio del bono respecto de la tasa de interés. La elasticidad es el cambio porcentual de una variable respecto al cambio porcentual de otra variable. En el caso que nos interesa, *la elasticidad del precio del bono respecto de la tasa de interés* puede escribirse como:

$$\varepsilon_{B_0,R} = \frac{\%\Delta B_0}{\%\Delta R} = \frac{dB_0}{dR}\frac{R}{B_0} = \frac{d\ln B_0}{d\ln R}$$

Antes de calcular la elasticidad del precio del bono respecto de la tasa de interés, calcularemos la elasticidad del precio del bono respecto de $(1 + R)$:

$$B_0 = \frac{B_N}{(1+R)^n}$$

$$\ln B_0 = \ln B_N - n\ln(1+R)$$

$$\boxed{\varepsilon_{B_0,(1+R)} = \frac{d\ln B_0}{d\ln(1+R)} = -n}$$

En la fórmula se ve claramente que la elasticidad del precio del bono respecto de $(1 + R)$ tiene signo negativo. Esto significa que al aumentar $(1 + R)$ baja el precio del bono. El hecho de que la elasticidad sea igual a $-n$ significa que, a mayor plazo, mayor sensibilidad del precio respecto de las tasas de interés.

La *elasticidad del precio del bono respecto de la tasa de interés* tiene la siguiente fórmula:

$$\boxed{\varepsilon_{B_0,R} = \frac{dB_0}{dR}\frac{R}{B_0} = -\frac{n \cdot R}{1+R} = -n \cdot \left(\frac{R}{1+R}\right)}$$

En la fórmula se ve claramente que la sensibilidad del bono con respecto a los cambios en la tasa de interés crece en la medida en que aumenta la tasa de interés y que se prolonga el plazo del bono.

$$\left.\begin{matrix} n \uparrow \\ R \uparrow \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varepsilon_{B_0,R} \uparrow$$

En el bono a 25 años, cuando la tasa de interés es de 4%:

$$\varepsilon_{B_0,R} = -\frac{25 \cdot 0.04}{1.04} = -0.9616$$

Esto significa que si la tasa de interés sube 1%, de 4 a 4.04%, el precio de bono bajará 0.9616%, de 37.51 a 37.15.

En el mismo bono, cuando la tasa de interés es de 16%, la elasticidad del precio del bono respecto de la tasa de interés es:

$$\varepsilon_{B_0,R} = -\frac{25 \cdot 0.16}{1.16} = -3.4483$$

por lo que si la tasa de interés sube 1%, de 16 a 16.16%, el precio del bono bajará 3.4483%, de 2.4465 a 2.3637.

A pesar de que el concepto de elasticidad del precio del bono respecto de la tasa de interés parece muy útil, tiene pocas aplicaciones prácticas. Lo que les interesa a los inversionistas no son los cambios porcentuales, sino la pérdida de capital en términos de pesos, cuando la tasa de interés sube un punto porcentual.

FÓRMULAS DEL CAPÍTULO

Ganancia de capital en una acción $$R_S = \frac{S_t - S_0}{S_0} = \frac{S_t}{S_0} - 1$$	Rendimiento de una acción con el dividendo $$R_S = \frac{(S_t - S_0) + D}{S_0}$$
Anualización nominal $$R_{\text{anual}} = R_p\left(\frac{360}{p}\right)$$	Anualización efectiva $$R_{\text{anual}} = (1 + R_p)^{\frac{360}{p}} - 1$$
Precio del bono cupón cero al utilizar el descuento bancario $$B_0 = B_N\left[1 - R_D\left(\frac{t}{360}\right)\right]$$	Precio del bono cupón cero al utilizar el descunto racional $$B_0 = \frac{B_N}{1 + R\left(\frac{t}{360}\right)}$$
Tasa de descuento con base en la tasa de rendimiento $$R_D = \frac{R}{1 + R\left(\frac{t}{360}\right)}$$	Tasa de rendimiento con base en la tasa de descuento $$R = \frac{R_D}{1 - R_D\left(\frac{t}{360}\right)}$$
Precio del bono cupón cero al utilizar el descuento bancario $$B_0 = \frac{B_N}{(1+R)^n}$$	Elasticidad del precio del bono cupón cero respecto de la tasa de interés $$\varepsilon_{B_0,R} = \frac{dB_0}{dR}\frac{R}{B_0} = -n \cdot \frac{R}{1+R}$$

Términos clave

Activos financieros (títulos o valores)
Anualización efectiva
Anualización nominal
Bono cupón cero
Convexidad del precio del bono
Costos de transacción
Dividendos
Elasticidad del precio del bono
Ganancia de capital
Liquidez
Mercado de capital
Mercado de dinero
Mercado de valores
Obligación
Oferta competitiva
Oferta no competitiva
Rendimiento al vencimiento
Rendimiento del periodo de tenencia
Riesgo de precio (de tasa de interés)
Vuelta completa

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. El 15 de enero de 1999 se compra una acción a \$39.5. La acción se vende a \$50.2 el 10 de mayo de 1999. Calcule el rendimiento de la inversión en la acción, tanto el rendimiento del periodo como el rendimiento anualizado. (Usar el año de 360 días.)
2. Repita el ejercicio anterior tomando en cuenta que la casa de bolsa cobra una comisión de 1.7% más el IVA por la vuelta completa. Calcule el costo de transacción con base anual.

3. Repita el ejercicio 1 tomando en cuenta que el 31 de marzo de 1999 la acción pagó un dividendo trimestral de \$0.4. La tasa libre de riesgo (Cetes) es de 21% anual.
4. En el problema 3, la casa de bolsa cobra una comisión de 1.4% más el IVA. Calcule el rendimiento anualizado de su inversión (nominal y efectivo).
5. El 3 de mayo de 1999 compra una acción a \$18.45. Hoy es 14 de junio y el precio de la acción es de \$15.1. ¿Cuál sería su pérdida de capital si vendiera su acción hoy?
6. Un Cete a 91 días se vende con la tasa de descuento de 18.5%:

   a) calcule el precio del Cete,

   b) calcule el rendimiento del Cete.
7. Después de 35 días, el dueño del Cete del problema anterior lo vende en el mercado secundario, pero en el momento de venta el rendimiento de los Cetes con el mismo vencimiento es de 20.5%.

   a) ¿a qué preció vendió el inversionista el Cete?

   b) ¿cuál fue su rendimiento del periodo de tenencia?
8. La tasa de rendimiento de los Cetes a 28 días es de 21.2%. Calcule la tasa equivalente de los Cetes a 182 días.
9. Usted compra 10 000 Cetes a 350 días con el rendimiento de 19.2%. Al día siguiente el rendimiento al mismo plazo sube dos puntos. ¿Cuál sería su pérdida de capital al vender el Cete al día siguiente? (en términos absolutos y de porcentaje).
10. Usted compra 10 000 Cetes a 182 días con la tasa de descuento de 18.3%. Después de siete días de tenencia, la tasa de descuento para Cetes al mismo plazo baja 1.5 puntos. ¿Qué ganancia de capital realizaría si vendiera sus Cetes?
11. Un bono de cupón cero a cinco años con el valor nominal de \$100 ofrece un rendimiento al vencimiento de 10%:

    a) ¿cuál es el precio del bono?,

    b) ¿cuál sería el rendimiento si el bono se vendiera a \$58?
12. Calcule la ganancia de capital del dueño de 1 000 bonos de cupón cero de \$100 a 30 años con el rendimiento de 8.5%, si la tasa de interés a ese plazo baja a 8%.
13. Calcule la pérdida de capital, en términos porcentuales, del dueño de los bonos sin cupones a 25 años, si la tasa de interés sube de 4.3 a 6.05%.
14. Repita el ejercicio anterior para los bonos a cinco años.
15. Usted tiene invertido 1 millón de dólares en los bonos del tesoro a 30 años. Hoy en día la tasa de rendimiento de estos bonos subió de 5.8 a 6.15%. Calcule la pérdida de capital en términos de dólares. "La inversión en los bonos del tesoro es libre de riesgo." Comente esta afirmación.

CAPÍTULO 12

Bonos con cupones

Objetivos del aprendizaje

Después de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

- Identificar los componentes de un bono con cupones.
- Calcular el valor del cupón.
- Relacionar el descuento o la prima con que se vende el bono con la relación entre la tasa de cupón y el rendimiento requerido.
- Calcular y entender las debilidades metodológicas del rendimiento corriente.
- Comprender la relación entre el descuento (o la prima) y el plazo hasta el vencimiento del bono.
- Calcular el precio (valor presente) del bono.
- Hacer distinción entre el rendimiento al vencimiento *ex ante* y el rendimiento al vencimiento realizado.
- Discernir entre el riesgo de reinversión y el riesgo de la tasa de interés.
- Calcular el precio del bono que se vende entre las fechas del cupón.
- Determinar el derecho al cupón de vendedor del bono.
- Analizar los bonos con cláusula de redención anticipada.
- Calcular el rendimiento del periodo de tenencia.
- Utilizar el módulo BONO de la calculadora financiera.

INTRODUCCIÓN

La mayoría de los bonos a largo plazo que se negocian en los mercados internacionales son *bonos con cupones*. El cupón es un pagaré que puede ser cobrado por el dueño del bono en la fecha de su vencimiento. Los cupones pueden ser anuales, semestrales o trimestrales. El cupón es un flujo de efectivo que generalmente cubre los intereses que genera el valor nominal del bono.

Para analizar los bonos con cupones utilizaremos los siguientes símbolos:

B_0 precio del bono, igual al valor actual de los flujos de efectivo del bono,

B_N valor nominal, también conocido con el nombre de *valor facial* o carátula,

n plazo en semestres o años,

R_C tasa de cupón, tasa nominal o tasa contractual,

${}_0R_T$ tasa de rendimiento al vencimiento (también designada y),

C cupón.

Un bono con cupones es un documento que promete pagar su valor nominal (B_N) al vencimiento y, además, un cupón al final de cada uno de los n periodos, donde n es el plazo del bono. En algunos casos, el bono puede ser redimido a un valor mayor que el valor nominal. Si el contrato del bono especifica que el bono con valor nominal de $1 000 se redime a 107, esto significa que, al vencimiento, el dueño del bono recibirá $1 070.

Generalmente el valor de redención es igual al valor nominal, con excepción de bonos con la cláusula de *redención anticipada*, en cuyo caso el valor de redención es mayor que el valor nominal.

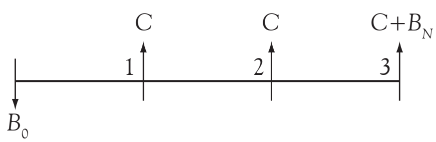
El valor del cupón anual se calcula multiplicando el valor nominal del bono por la tasa de cupón (tasa nominal).

$$C = B_N \times R_C$$

Si la tasa de cupón es igual a la tasa de mercado, el precio del bono es igual a su valor nominal (el bono se negocia a la par).

El cupón semestral es simplemente la mitad del cupón anual.

La línea de tiempo de un bono a tres años con el cupón anual es la siguiente:



Normalmente la tasa de cupón es la tasa de mercado ajustada por el riesgo del emisor en el momento de la emisión del bono. El emisor pretende vender el bono a su valor nominal.

Si el bono no se vende a su precio nominal, incluso en el momento de la emisión, quiere decir que los compradores en potencia requieren un mayor rendimiento que el que el emisor estaba dispuesto a pagar fijando la tasa de cupón. Esto puede suceder por dos razones:

1. En el periodo entre la emisión del bono y su colocación en el mercado suben las tasas de interés.
2. El mercado evalúa un riesgo del emisor, mayor de lo que él mismo cree.

Para que el bono ofrezca un mayor rendimiento que la tasa de cupón, tiene que venderse con descuento.

TASAS DE RENDIMIENTO

Existen varias medidas de rendimiento de los bonos con cupones. Cada una tiene sus ventajas y desventajas; a continuación hacemos una revista de las principales. Para evitar confusión en casos que pueden despertar dudas se cita el nombre en inglés.

El *rendimiento corriente* (*current yield*), algunas veces traducido como *rendimiento actual*, sólo toma en cuenta el cupón anual y el precio del bono, que constituye la inversión inicial en el mismo.

$$R_{\text{corriente}} = \frac{C}{B_0} = \frac{\text{El valor del cupón anual}}{\text{El precio de compra del bono}}$$

Si un bono con valor nominal de \$100 que tiene cupones anuales de \$10 se compró a \$90, su rendimiento corriente es: $R_{\text{corriente}} = \dfrac{10}{90} = 0.1111 = 11.11\%$

Aunque se usa con frecuencia, el rendimiento corriente tiene las siguientes desventajas metodológicas:

1. No toma en cuenta una posible ganancia (o pérdida) de capital.
2. No toma en cuenta el plazo. Un descuento de \$10, por ejemplo, debe aumentar más el rendimiento del bono a un año que el rendimiento de un bono a 20 años. Sin embargo, el rendimiento corriente de los dos bonos sería igual.

Cuando el bono ofrece un rendimiento ajustable periódicamente, el rendimiento corriente es el único que se puede calcular.

EJEMPLO 1

Un Bonde a 728 días, con valor nominal de \$100, paga cupones cada 28 días a la tasa de Cetes. El bono fue comprado con descuento a \$97.50. Cuando llegó la fecha del primer cupón, la tasa de los Cetes fue de 21.2%. Calcule:

a) el valor del primer cupón,

b) el rendimiento corriente (anualizado) de los primeros 28 días.

Solución:

a) $C_1 = 100\left(0.212\,\frac{28}{360}\right) = 1.6489$

b) $R_{\text{corriente}} = \frac{C_1}{B_0}\left(\frac{360}{28}\right) = \frac{1.6489}{97.5}\left(\frac{360}{28}\right) = 0.0169(12.8571) = 0.2174 = 21.74\%$

Respuestas: *a*) el primer cupón es de \$1.6489. *b*) Durante los primeros 28 días, el rendimiento corriente de la inversión en el Bonde fue de 21.74%.

Para el comprador del bono (inversionista) el rendimiento al vencimiento es el *rendimiento requerido*. Para el emisor es el *costo de capital*.

En el lenguaje de finanzas la diferencia entre el rendimiento corriente del Bonde y el rendimiento del Cete a 28 días se llama *sobretasa* o *spread*. En el ejemplo 1, el *spread* se debe exclusivamente a que el bono fue comprado con descuento. En otros casos el *spread* puede ser estipulado como parte del contrato. Por ejemplo, el bono pagará cupones cada 28 días de acuerdo con la tasa de los Cetes del momento, más un punto porcentual.

El *rendimiento al vencimiento* (*yield to maturity*) es la tasa de descuento que iguala el valor presente de los flujos esperados del bono con su precio. Es la tasa interna de retorno (TIR), también conocida como *rendimiento verdadero*. Desde el punto de vista matemático, el rendimiento al vencimiento es el *rendimiento ponderado por el peso* (*dollar weighted return*). Se puede calcular con base en la fórmula del precio del bono.

Si el rendimiento al vencimiento es mayor que la tasa de cupón, el bono se vende con descuento, es decir, su precio será más bajo que su valor nominal. Sucede lo contrario si el rendimiento al vencimiento es menor que la tasa de cupón.

A continuación resumiremos la relación de la tasa de cupón con la tasa de rendimiento, por un lado, y el precio del bono y su valor nominal, por el otro:

Un bono que se vende con descuento tiene incluida en su precio una *ganancia de capital*. Un bono que se vende con prima tiene incluida en su precio una *pérdida de capital*.

$$ {}_0R_T = R_C \quad \Leftrightarrow \quad B_0 = B_N \qquad \text{el bono se vende a la par,} $$

$$ {}_0R_T < R_C \quad \Leftrightarrow \quad B_0 > B_N \qquad \text{el bono se vende sobre la par (con prima),} $$

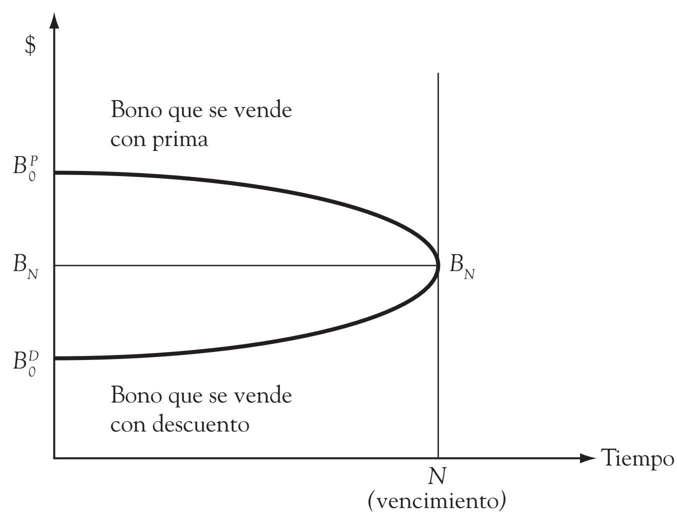
$$ {}_0R_T > R_C \quad \Leftrightarrow \quad B_0 < B_N \qquad \text{el bono se vende bajo la par (con descuento).} $$

Es perfectamente comprensible que el bono, cuyo rendimiento al vencimiento es mayor que la tasa de cupón (${}_0R_T > R_C$), se venda con descuento. Si los cupones, que representan los intereses pagados por el bono, son insuficientes para proporcionar el rendimiento requerido por los inversionistas, el bono tiene que ofrecer alguna otra fuente de rendimiento. Esta fuente es la ganancia de capital que realiza el inversionista si compra el bono con descuento.

Mientras más corto es el tiempo hasta el vencimiento, es necesario menor descuento para complementar el rendimiento requerido. Este hecho constituye el fundamento de una impor-

Figura 12.1

Al acercarse el vencimiento, los precios de los bonos, tanto los que se venden con descuento como los que se venden con prima, convergen hacia su valor nominal.



tante regla: en la medida en que se acerca el vencimiento, los precios de los bonos vendidos con descuento o con prima convergen hacia su valor nominal.

El valor actual, o precio del bono, es la suma del valor presente de todos los flujos de efectivo que el bono generará durante su existencia. Es el valor presente de todos los cupones más el valor presente de la carátula.

$$B_0 = \frac{C}{1+y} + \frac{C}{(1+y)^2} + \frac{C}{(1+y)^3} + \cdots + \frac{C+B_N}{(1+y)^N}$$

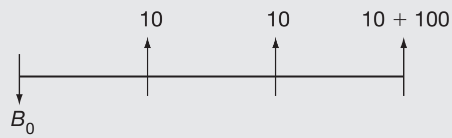
donde $y = {}_0R_T$ es el rendimiento al vencimiento del bono.

EJEMPLO 2

Un bono a tres años con valor facial de $100 paga cupones anuales de $10. ¿Cuál es el valor actual del bono si la tasa de mercado es igual a 10%?

$$N = 3,\quad B_N = 100,\quad C = 10,\quad R = 10\%,\quad RC = C/B_N = 0.1 = 10\%,\quad B0 = ?$$

Solución: El bono promete cuatro flujos de efectivo: tres cupones de $10 al final del primero, segundo y tercer año, y su valor nominal igual a $100 al final del tercer año. El diagrama de flujos de efectivo es el siguiente:



Al utilizar la fórmula del valor presente para cada flujo de efectivo y sumar, tenemos:

$$B_0 = \frac{C_1}{(1+R)^1} + \frac{C_2}{(1+R)^2} + \frac{C_3}{(1+R)^3} + \frac{B_N}{(1+R)^3} =$$

$$= \frac{10}{1.1} + \frac{10}{1.1^2} + \frac{10}{1.1^3} + \frac{100}{1.1^3} = 24.868 + 75.131 = 100$$

El valor presente de los tres cupones es $24.868 y el valor presente de la carátula es $75.131. El valor del bono es igual a su valor nominal de $100. Esto no debe sorprender dado que, en este ejemplo, la tasa de descuento es igual a la tasa de cupón.

Respuesta: El bono vale $100.

Si generalizamos el ejemplo anterior y utilizamos la notación de sumatoria, podemos escribir la *fórmula para el valor actual del bono* (el precio del bono):

$$\boxed{B_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+{}_0R_T)^t} + \frac{B_N}{(1+{}_0R_T)^T}}$$

donde $_0R_T$ es el rendimiento al vencimiento del bono. Más adelante, para simplificar la notación, utilizaremos el símbolo y.

C_t es el valor del cupón que se recibe al final del periodo t.

Al observar la sumatoria en la fórmula podemos constatar fácilmente que se trata de una anualidad de pagos iguales, C, con la tasa de interés, $_0R_T$ $(= y)$, y con T periodos. Si utilizamos la fórmula para el valor presente de la anualidad, podemos escribir la fórmula para el valor presente de los cupones como sigue:

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+y)^t} = \frac{C}{y}\left[1 - \frac{1}{(1+y)^T}\right]$$

Dado que los pagos son iguales, podemos emplear C en vez de C_t. Ahora, sumando al valor presente de los cupones el valor presente del valor nominal, obtenemos la *fórmula del precio del bono*:

$$\boxed{B_0 = \frac{C}{y}\left[1 - \frac{1}{(1+y)^T}\right] + \frac{B_N}{(1+y)^T}}$$

Si los cupones son anuales, la tasa de rendimiento también lo es y el tiempo se mide en años. En caso de cupones semestrales el rendimiento es semestral y el tiempo se mide en semestres.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Un bono a cinco años, con valor nominal de $1 000, con cupones semestrales y la tasa de cupón de 12%, ofrece un rendimiento al vencimiento de 13.2%. Calcule el precio del bono.

Respuesta: $957.07.

La fórmula del precio del bono permite detectar una importante debilidad metodológica del rendimiento al vencimiento en el caso de los bonos con cupones. Si la cantidad que pagamos por el bono, B_0, la invertimos a n años con la tasa de rendimiento y, el valor terminal de nuestra inversión será $VF = B_0(1+y)^N$. Mientras tanto, la fórmula del precio del bono es:

$$B_0 = \frac{C_1}{1+y} + \frac{C_2}{(1+y)^2} + \cdots + \frac{C_N + B_N}{(1+y)^N}$$

Para obtener el valor futuro de esta cantidad, multiplicamos ambos lados por $(1+y)^N$.

$$VF = B_0(1+y)^N = C_1(1+y)^{N-1} + C_2(1+y)^{N-2} + \cdots + C_N + B_N$$

Para que el lado derecho sea igual al izquierdo, es necesario que todos los cupones sean *reinvertidos* a la tasa y, que es precisamente el rendimiento al vencimiento, durante el periodo que falta para el vencimiento ($N - t$).

En realidad, durante la vida del bono las tasas de interés pueden bajar o subir. En el primer caso, el rendimiento que se obtiene al vencimiento será menor que el rendimiento al vencimiento calculado *ex ante*. En el segundo caso, el rendimiento realizado será mayor que el calculado. Este defecto metodológico del rendimiento al vencimiento se llama el *supuesto de reinversión de cupones*.[5]

Así, el comprador del bono puede no realizar el rendimiento al vencimiento en dos casos:

1. No puede reinvertir los cupones a la tasa igual al rendimiento al vencimiento (el *riesgo de reinversión*).
2. No mantiene el instrumento hasta el vencimiento y en el momento de su venta las tasas de interés son más altas que en el momento de su compra (*riesgo de la tasa de interés* o *riesgo de precio*).

El rendimiento al vencimiento puede ser interpretado como la media geométrica de los rendimientos anuales que se recibirán durante la vida del bono.

Sea R_i la tasa de interés vigente durante el periodo i ($i = 1, 2, 3,\ldots, N$). El valor presente del bono es la suma de los flujos de efectivo que produce, descontados por las tasas de interés vigentes en cada periodo.

$$B_0 = \frac{C_1}{1+R_1} + \frac{C_2}{(1+R_1)(1+R_2)} + \cdots + \frac{C_N + B_N}{(1+R_1)(1+R_2)\cdots(1+R_N)}$$

Si comparamos esta fórmula con la del valor presente que usa el rendimiento al vencimiento: $B_0 = \frac{C_1}{1+y} + \frac{C_2}{(1+y)^2} + \cdots + \frac{C_N + B_N}{(1+y)^N}$, podemos ver que éste es el promedio geométrico de los rendimientos anuales anticipados:

$$(1+y)^N = (1+R_1)(1+R_2)\cdots(1+R_N) \quad \Rightarrow \quad 1+y = [(1+R_1)(1+R_2)\cdots(1+R_N)]^{1/N}$$

Si la fórmula presentada arriba es calculada *ex post*, el rendimiento, y, se llama *rendimiento al vencimiento compuesto realizado* (*realized compound yield to maturity*). Éste toma en cuenta las tasas de reinversión de todos los cupones. El rendimiento al vencimiento calculado *ex ante* es sólo una aproximación (expectativa) del rendimiento compuesto al vencimiento, realizado.

Es muy fácil calcular el precio del bono con cupones en la calculadora financiera. El valor actual es el precio del bono, el valor futuro es su valor nominal y el pago es el cupón. Si éste es anual, el interés se compone una vez al año; si es semestral, la tasa de interés se compone dos veces al año. A continuación presentamos la secuencia de teclas para resolver el ejemplo 1:

---

[5] Dado que la tasa interna de retorno (TIR), utilizada en la evaluación de proyectos de inversión es lo mismo que el rendimiento al vencimiento, la TIR también padece del mismo defecto, llamado *supuesto de reinversión de los flujos de efectivo provenientes del proyecto*.

FIN, VDT, 1 NO.P AÑO, MODO FINAL, CLEAR DATA

N	%IA	VA	PAGO	VF
3	10	?	10	100

Al pulsar la tecla **VA** obtenemos la respuesta: −100.

En realidad, el precio del bono se establece en el mercado, determinado por las fuerzas de la oferta y la demanda. El inversionista que desea adquirir un bono enfrenta el precio de mercado. Lo que necesita calcular es el rendimiento al vencimiento, implícito en este precio. Como ya recalcamos varias veces, el cálculo de la tasa de rendimiento requiere el uso de una calculadora financiera o una computadora.

EJEMPLO 3

Un bono a 20 años con valor nominal de $1 000 y con la tasa de cupón de 10% se ofrece a $850. Calcule:

a) el rendimiento corriente del bono,

b) el rendimiento al vencimiento del bono.

$$T = 20, \quad B_N = 1\,000, \quad R_C = 10\%, \quad C = B_N R_C = 100, \quad B_0 = 850, \quad y = ?$$

Solución:

a) El rendimiento corriente es el rendimiento proporcionado por el cupón en relación con el precio de compra.

$$R_{\text{corriente}} = \frac{C}{B_0} = \frac{100}{850} = 0.1176 = 11.76\%$$

b) El rendimiento al vencimiento del bono debe ser mayor que la tasa de cupón, porque su precio es más bajo que su valor nominal. Para calcular el rendimiento exacto escribimos la fórmula para el valor presente del bono y aplicamos algún paquete de computación disponible.

$$850 = \frac{100}{y}\left[1 - \frac{1}{(1+y)^{20}}\right] + \frac{1\,000}{(1+y)^{20}}$$

Como es fácil comprobar, la tasa de descuento que cumple con esta ecuación es $y = 12\%$ (el valor exacto es 12.0094%). Esta tasa es mayor que la tasa de cupón porque el bono se vende con un descuento de su valor nominal.

Respuesta: El rendimiento corriente del bono es de 11.76% y su rendimiento al vencimiento, implícito en el precio del bono, es igual a 12%.

La secuencia en la calculadora financiera es la siguiente:

1 NO.P AÑO, MODO FINAL, CLEAR DATA

N	%IA	VA	PAGO	VF
20	?	−850	100	1 000

Al pulsar la tecla %IA, obtenemos la respuesta: 12.0094.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Método de prueba y error

En ausencia de algún equipo de cómputo, la única manera de calcular el rendimiento al vencimiento es mediante prueba y error. El punto de salida es la fórmula para el precio del bono:

$$B_0 = \frac{C}{y}\left[1 - \frac{1}{(1+y)^T}\right] + \frac{B_N}{(1+y)^T} = VP(FE)$$

Seleccionamos alguna tasa de descuento al azar: $y = y_1$ y utilizando esta tasa calculamos el lado derecho de la ecuación. Si el lado derecho, que representa el valor presente de los flujos de efectivo del bono, es mayor que el precio del bono, tenemos que aumentar la tasa de interés ($y = y_2$ tal que $y_2 > y_1$) y repetir el cálculo.

$$\text{Si para } y = y_1 \qquad VP(FE) > B_0 \quad \Rightarrow \quad \text{aumentar } y$$

Si después de varios cálculos el lado derecho es menor que el precio del bono, el rendimiento al vencimiento se encuentra entre la última tasa para la cual el lado derecho era mayor que el precio y la tasa para la cual el lado derecho es menor.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si para} & y_1 & VP(FE) > B_0 \\ \text{Si para} & y_2 & VP(FE) < B_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y_1 < y < y_2$$

Ahora podemos utilizar la interpolación lineal para aproximar la tasa buscada.

EJEMPLO 4

Los datos son los mismos que en el ejemplo 2, pero ahora el precio de mercado del bono es $1 200. Calcule: *a*) el rendimiento corriente del bono, *b*) el rendimiento al vencimiento del bono.

$$T = 20, \quad B_N = 1\,000, \quad R_C = 10\%, \quad C = B_N R_C = 100, \quad B_0 = 1\,200, \quad y = ?$$

Solución:

a) El rendimiento corriente se calcula dividiendo el cupón entre el precio de compra.

$$R_{\text{corriente}} = \frac{C}{B_0} = \frac{100}{1\,200} = 0.0833 = 8.33\%$$

b) El rendimiento al vencimiento del bono debe ser menor que la tasa de cupón, porque el precio es más alto que el valor nominal. Utilizamos la misma fórmula que en el ejemplo 2, cambiando sólo el precio del bono.

$$1\,200 = \frac{100}{y}\left[1 - \frac{1}{(1+y)^{20}}\right] + \frac{1\,000}{(1+y)^{20}}$$

La tasa de descuento que cumple con esta ecuación es $y = 8\%$ (el valor exacto es 7.9678%). Dado que el bono se vende con prima, el rendimiento al vencimiento es menor que la tasa de cupón y menor que el rendimiento corriente.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Relación de la tasa de cupón con el rendimiento corriente y el rendimiento al vencimiento en bonos con cupones

Al generalizar los ejemplos 2 y 4 es posible establecer una relación entre las tres tasas de rendimiento: en un bono de descuento el rendimiento al vencimiento es mayor que el rendimiento corriente, y éste es mayor que la tasa de cupón.

$$B_0 < B_N \qquad \Rightarrow \qquad {}_0R_T > R_{\text{corriente}} > R_{\text{cupón}}$$

En un bono con prima, el rendimiento al vencimiento es menor que el rendimiento corriente, y éste es menor que la tasa de cupón.

$$B_0 > B_N \qquad \Rightarrow \qquad {}_0R_T < R_{\text{corriente}} < R_{\text{cupón}}$$

Además, mientras más largo sea el plazo del bono, menor es la diferencia entre el rendimiento al vencimiento y el rendimiento corriente, dado que el descuento (o la prima) se distribuye entre un mayor número de periodos.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Un bono a 30 años, con valor nominal de $1 000, con cupones semestrales y la tasa de cupón de 11%, se vende a $935. Calcule: *a*) el rendimiento corriente del bono, *b*) el rendimiento al vencimiento.

Respuestas: *a*) 11.76%, *b*) 11.79%.

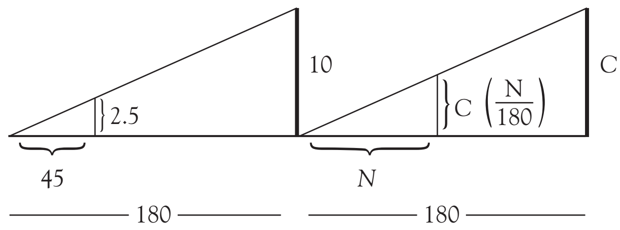
PRECIO DEL BONO ENTRE FECHAS DE PAGO DE CUPONES

En los ejemplos 1, 2 y 3 se supone que el bono se vende justo el día de vencimiento de cupón. Si el bono se vende entre las fechas de cupón, el vendedor tiene derecho a una parte proporcional del siguiente cupón que aumenta al precio de mercado del bono. El derecho al cupón representa los intereses devengados por el instrumento pero no cobrados por su dueño. La suma del precio de mercado (el precio cotizado) y el derecho al cupón se llama precio neto del bono o precio de factura. En México, el precio del bono sin el derecho al cupón se llama *precio limpio*, y el precio con el derecho al cupón, *precio sucio*. El *derecho al cupón* (*accrued interest*) se calcula con la regla de tres.

Supongamos que un bono con valor nominal de $100 paga un cupón semestral de $10. El dueño del bono gana estos $10 durante 180 días. Si el bono se vende 45 días después del pago del último cupón, el tenedor del bono tiene el derecho a 45 días de intereses. El valor de este derecho puede calcularse como parte proporcional del cupón. Si en 180 días se tiene derecho a $10, en 45 días se tiene derecho a $\frac{45}{180}10 = 2.5$. Estos $2.5 son los intereses ganados por el tenedor del bono y deben añadirse al precio. Así, el nuevo dueño, al recibir el cupón de

Figura 12.2

El derecho al cupón entre las fechas de pago de cupones.



\$10 en la siguiente fecha, sólo cobrará la parte del cupón que corresponde a los 135 días, es decir, \$7.5.[6]

Para calcular de manera alternativa el derecho al cupón se utiliza la tasa de éste, que en nuestro caso es de 20%. Si desde la fecha del último pago transcurrieron 45 días, el derecho al cupón es $100\left(0.2\frac{45}{360}\right) = 2.5$.

EJEMPLO 1

Un bono semestral a tres años con valor nominal de \$1 000 y la tasa de cupón de 10% vence el 1 de diciembre de 2000. El bono fue comprado el 15 de enero de 1998 con el rendimiento al vencimiento de 12%. Calcule el precio de compra de bono.

$$N = 6 \text{ semestres menos 45 días}, \quad B_N = 1\,000, \quad C = 50, \quad y = 12\%$$

Solución: Las fechas de pago de cupones se calculan desde la fecha de vencimiento hacia atrás. Si el segundo cupón del año se paga el 1 de diciembre, la fecha del primer cupón debe ser el 1 de junio.

Dado que el bono se vende entre las dos fechas de cupón, primero tenemos que calcular el precio de mercado del bono y después la parte proporcional del cupón que corresponde al vendedor y añadirla al precio.

Hay dos maneras de calcular el precio entre las fechas de cupón.

Método del plazo fraccionario

Se utiliza el plazo exacto del bono que en nuestro caso es de cinco semestres y 135 días, es decir, 5.75 semestres. Al aplicar la fórmula del valor presente del bono tenemos:

$$B_0 = \frac{50}{0.06}\left[1 - \frac{1}{(1.06)^{5.75}}\right] + \frac{1\,000}{(1.06)^{5.75}} = 952.55$$

Método de interpolación lineal

Este método consiste en calcular el precio del bono para las fechas de cupón antes y después de la fecha de venta y utilizar la interpolación lineal.

[6] El lector habrá notado que este planteamiento ignora el valor del dinero en el tiempo.

El lector puede comprobar fácilmente que:

$$B_0(N = 5) = 957.87 \quad \text{y} \quad B_0(N = 6) = 950.83.$$

La diferencia entre los dos precios es de 7.0496. Esta diferencia corresponde a 180 días. Para calcular la diferencia correspondiente a 45 días podemos formar la siguiente proporción:

$\frac{7.05}{180} = \frac{X}{45}$, donde $X = 1.7624$. Hay que sumar esta cantidad al precio del bono a seis semestres: $950.83 + 1.76 = 952.59$.

Los resultados de los dos métodos son muy semejantes, pero el método de interpolación lineal es menos exacto porque se basa en el supuesto injustificado de que entre las dos fechas de cupón el precio del bono crece en una forma lineal. Sin embargo, es el método utilizado con mayor frecuencia.

Ya tenemos el precio de mercado. Lo que falta es calcular la parte proporcional del cupón que corresponde al vendedor. Otra vez, al utilizar la regla de tres, formamos la siguiente proporción:

$\frac{50}{180} = \frac{X}{45}$, donde $X = 12.5$.

Entonces, \$12.5 es el derecho al cupón que pertenece al vendedor, por lo que se suma al precio de mercado del bono para obtener el precio neto: $952.55 + 12.5 = 965.05$.

Respuesta: El bono se vende a \$965.05.

Método de interés compuesto (método exacto)

Desde el punto de vista metodológico, también es correcto tomar como base el precio del bono en la fecha de cupón inmediatamente antes de la fecha de venta y hacerlo crecer a la tasa de rendimiento con la capitalización semestral, tomando como periodo la fracción del semestre entre la última fecha de cupón y la fecha de venta: $45/180 = 0.25$.

$$B_0 = \left(B_{0,N=6}\right)\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{45/180} = 950.83(1.06)^{0.25} = 964.78$$

El resultado es muy parecido al obtenido con el método del derecho al cupón.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Un bono anual a cinco años con valor nominal de \$100 y tasa de cupón de 12% vence el 5 de diciembre de 2003. El bono fue comprado el 25 de marzo de 1999, con el rendimiento al vencimiento de 10%. Calcule el precio de mercado del bono, el derecho al cupón y el precio neto.

Respuestas: $B_0 = 107.21$, derecho al cupón = 3.67, precio neto = 110.88.

La distribución de descuento en equivalentes semestrales

Cuando el rendimiento requerido es mayor que la tasa de cupón, el bono se vende con descuento. En este caso los cupones no ofrecen el rendimiento requerido por los inversionistas.

El descuento proporciona una ganancia de capital, pero ésta sólo se realiza en el momento de venta del bono. ¿Cómo prorratear el descuento a los rendimientos semestrales que, sumados a los cupones, produzcan el rendimiento requerido?

EJEMPLO 2

Un bono semestral a tres años con valor nominal de $1 000 y con tasa de cupón de 7% se vende cuando la tasa de interés del mercado es de 8%. Calcule:

a) el precio del bono,

b) el rendimiento semestral que se deriva del descuento.

$$N = 3 \text{ años} = 6 \text{ semestres}, \quad B_N = 1\,000, \quad R_C = 7\%, \quad C = 35, \quad y = 8\%$$

Solución:

a) Utilizaremos la calculadora financiera para computar el precio del bono:

VDT, 2 NO.P AÑO MODO FINAL, CLEAR DATA, N = 6, %IA = 8, PAGO = 35, VF = 1 000.

Al pulsar la tecla VA, obtenemos la respuesta: − 973.79.

Así, el descuento es 1 000 − 973.79 = 26.21. Este descuento se realizaría si, al vencimiento, se vende el bono a su valor nominal.

b) Para calcular el equivalente semestral del descuento supongamos que el dueño vende el bono después de un semestre[7] y las condiciones del mercado permanecen sin cambio. El lector puede comprobar fácilmente que el precio de venta es de $ 977.74.

El descuento proporciona una ganancia de capital semestral que, sumada al cupón, produce el rendimiento corriente igual a la tasa del mercado.

La ganancia de capital semestral es 977.74 − 973.79 = 3.9516. Si sumamos esta ganancia de capital al cupón obtenemos 35 + 3.9516 = 38.9516.

Al dividir la ganancia semestral entre el precio de compra obtenemos el rendimiento corriente semestral: $\dfrac{38.95}{973.79} = 0.04 = 4\%$.

Desde luego, 4% semestral corresponde a 8% anual, exactamente el rendimiento requerido, igual a la tasa de interés del mercado.

BONOS REDIMIBLES (*CALLABLE BONDS*)

En bonos a largo plazo, el riesgo para el inversionista es que durante el periodo de tenencia las tasas de interés suban. En este caso, el dueño del bono sufre una pérdida de capital. Para el emisor, el riesgo es que las tasas bajen y él tenga que seguir pagando las tasas pactadas más altas. Para reducir este riesgo, algunos emisores incluyen en sus bonos la cláusula de redención anticipada.[8] Según ésta, después de un periodo estipulado, el emisor puede recomprar el bono a un precio establecido de antemano. En caso de que el emisor ejerza su derecho de redimir

[7] Faltando cinco semestres para su vencimiento.

[8] Redención anticipada: también puede llamarse *amortización anticipada* o *reembolso anticipado*. En algunos textos los bonos redimibles se llaman *bonos reembolsables*.

el bono anticipadamente, el inversionista no realizará el rendimiento al vencimiento sino el *rendimiento hasta la redención* (*yield to call*), más bajo que el rendimiento al vencimiento. El precio de redención (*call price*) es generalmente el valor nominal más el valor de uno o dos cupones semestrales.

Cuando el precio de mercado del bono es igual o mayor al precio de redención, el inversionista, además de calcular el rendimiento al vencimiento, tiene que calcular el rendimiento hasta la redención (y_{call})

EJEMPLO 1

Un bono de cupón anual a 20 años con valor nominal de $100 y con tasa de cupón de 10% se vendió originalmente a la par. El bono es redimible y el emisor tiene el derecho a recomprarlo después de cinco años a $105. Luego de dos años de vida del bono las tasas de interés para este tipo de instrumentos bajan a 9%. Calcule:

a) el precio del bono después de dos años,

b) el rendimiento hasta la redención.

Solución:

a) Después de dos años, el bono todavía tiene 18 años de vida. Su precio es:

$$B_0 = \frac{10}{0.09}\left[1 - \frac{1}{1.09^{18}}\right] + \frac{100}{1.09^{18}} = 108.7556$$

b) En el caso de redención del bono en el quinto año de su vida, el inversionista que lo compró a $108.75, después de tres años, obtendrá por él $105. El rendimiento de su inversión puede ser calculado en la siguiente ecuación:

$$108.7556 = \frac{10}{y_{call}}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + y_{call}\right)^3}\right] + \frac{105}{\left(1 + y_{call}\right)^3}$$

Utilizamos la siguiente secuencia en la calculadora financiera:

1 NO.P AÑO MODO FINAL, CLEAR DATA, N = 3, VA = 2 108.76, PAGO = 10, VF = 105

Al pulsar la tecla %IA, obtenemos la respuesta: 8.1326%.

Respuestas: *a*) después de dos años el precio del bono es de 108.75,

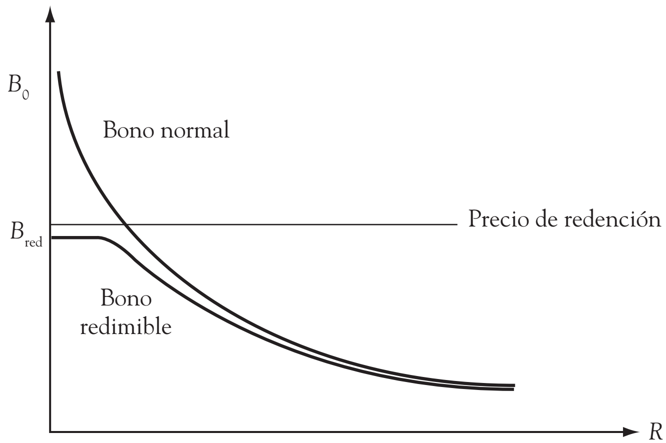
b) el rendimiento hasta la redención es de 8.13%, menor que el rendimiento al vencimiento igual a 9%.

En el ejemplo 1 se ve claramente que la cláusula de redención anticipada es favorable para el emisor y desfavorable para el inversionista. Si es así, ¿qué incentivo tienen los inversionistas para comprar este tipo de bonos? Para compensar por la cláusula de redención, el emisor está obligado a vender el bono a un precio más bajo (con mayor descuento) que un bono equivalente sin la cláusula de redención. Un precio más bajo implica un mayor rendimiento al vencimiento.

Un bono que se vende con descuento tiene pocas probabilidades de ser redimido anticipadamente. Un fuerte descuento constituye una protección implícita contra la redención anticipada.

Figura 12.3

Precios de los bonos normales contra los redimibles.



En cambio, un bono que se vende con prima tiene alta probabilidad de ser redimido anticipadamente. En este caso tiene poco sentido calcular su rendimiento al vencimiento. Es más significativo calcular el rendimiento hasta la redención.

Tomando en cuenta lo anterior, en las publicaciones financieras se acostumbra cotizar el rendimiento al vencimiento para los bonos que se venden con descuento y el rendimiento hasta la redención (*yield to call*) para los bonos que se venden con prima.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Un bono con valor nominal de $100 a 15 años que paga el cupón semestral de $4.5 se vende a $110. El bono puede ser redimido después de siete años a un precio de redención de $104.5. Calcule:

a) el rendimiento al vencimiento del bono,

b) el rendimiento hasta la redención.

Respuestas: *a*) ${}_0R_{15} = 7.8537\%$, *b*) $y_{call} = 7.6281\%$.

RENDIMIENTO DEL PERIODO DE TENENCIA

El concepto de rendimiento al vencimiento (${}_0R_T$) tiene la ventaja de tomar en cuenta la distribución en el tiempo de los futuros flujos de efectivo. Su desventaja principal es que en su cálculo se supone que todos los flujos de efectivo futuros podrán ser reinvertidos a la misma tasa, ${}_0R_T$. Este supuesto raras veces es cierto.

Para remediar este defecto del rendimiento al vencimiento se utiliza el concepto de *rendimiento del periodo de tenencia* (*holding-period return*, o HPR), que designamos como R_h, o simplemente *h*. Este concepto es aplicable si el inversionista no tiene la intención de mantener el bono hasta su vencimiento, sino que desea venderlo antes.

Si el periodo de tenencia es m, y el inversionista espera vender el bono después de m periodos a un precio B_m, la fórmula para calcular el rendimiento del periodo de tenencia es:

$$B_0 = \sum_{t=1}^{m} \frac{C_t}{(1+h)^t} + \frac{B_m}{(1+h)^m} = \frac{C}{h}\left(1 - \frac{1}{(1+h)^m}\right) + \frac{B_m}{(1+h)^m}$$

Al sustituir todos los demás valores en esta fórmula procuramos encontrar el valor de h, que cumple con la ecuación.

La estimación del precio de venta (B_m) depende de las tasas a plazo derivadas de la estructura a plazos de las tasas de interés y determinada por el mercado (se explicará este concepto más adelante).

EJEMPLO 1

Un bono con valor nominal de $1 000 a 20 años, con el cupón anual y con la tasa de cupón de 10%, se ofrece a $850. Un inversionista desea adquirir el bono, pero cree que tendrá que venderlo en cinco años. ¿Cuál es el rendimiento del periodo de tenencia del bono?

$$T = 20, \quad m = 5, \quad B_m = \text{estimación}, \quad R_C = 10\%, \quad C = 100, \quad B_0 = 850, \quad h = ?$$

Solución: Sustituimos en la fórmula los datos del problema para el rendimiento del periodo de tenencia y procuramos hallar h:

$$850 = \frac{100}{h}\left(1 - \frac{1}{(1+h)^5}\right) + \frac{B_5}{(1+h)^5}$$

El rendimiento del periodo de tenencia depende del precio al que el inversionista espera vender el bono en cinco años. A continuación presentamos una tabla que relaciona un rendimiento del periodo de tenencia (h) con diferentes estimaciones del precio de venta del bono, B_5.

B_5	R_h (%)
800	10.8167
850	11.7647
900	12.6783
950	13.5601
1 000	14.4127
1 100	16.0382

Observaciones:

1. Cuando el precio de venta esperado es menor que el precio de compra, la tasa de rendimiento del periodo de tenencia es menor que la tasa de rendimiento al vencimiento (12%).
2. Cuando el precio de venta del bono es igual a su precio de compra, el rendimiento del periodo de tenencia es casi igual que el rendimiento al vencimiento (${}_0R_{20} = 12\%$).
3. Cuando se espera vender el bono a un precio mayor que el precio de compra, el rendimiento del periodo de tenencia es mayor que el rendimiento al vencimiento.

Para ver cómo el precio de venta del bono depende de la tasa de interés vigente en el momento de venta, calculemos qué tasa de interés en cinco años es compatible con el precio de venta de $800.

En cinco años la vida del bono será de tan sólo 15 años. El bono generará 15 cupones de $100 cada uno y un valor nominal de $1 000. Para calcular la tasa de rendimiento, tratamos el bono a 20 años como si fuera uno nuevo con el vencimiento en 15 años. Para ahorrar tiempo utilizamos la calculadora financiera:

1 NO.P AÑO MODO FINAL, CLEAR DATA, N = 15, VA = 800, PAGO = 100, VF = 1 000

Al pulsar la tecla %IA, obtenemos la respuesta: 13.11%.

De manera análoga podemos calcular que, para que en cinco años el precio del bono sea de $1 100, la tasa de interés en el momento de venta tiene que ser de 8.77%.

Así, si supiéramos cuál será la tasa de interés en el momento de venta, fácilmente podríamos calcular el precio. El mejor pronóstico de las tasas de interés en el futuro es la tasa a plazo implícita en los precios de los bonos.

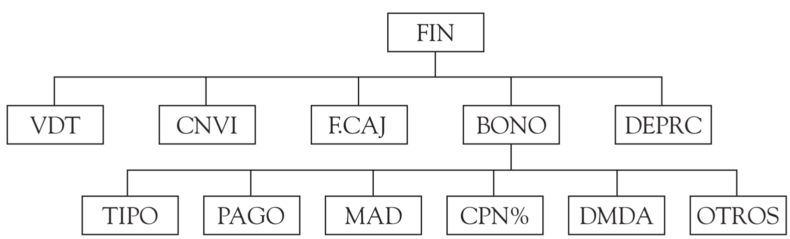
EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

Un inversionista compra un bono a largo plazo con valor nominal de $100 y el cupón anual de $12.5 a $90 (el plazo es irrelevante). El inversionista anticipa una baja de las tasas de interés y calcula que en tres años podrá vender el bono a $105. Calcule el rendimiento del periodo de tenencia anticipado.

Respuesta: R_h = 18.53%.

BONOS EN LA CALCULADORA FINANCIERA

En la práctica, el cálculo del precio y el rendimiento de los bonos se dificultan debido a detalles técnicos. Compramos el bono en una fecha y lo vendemos en otra, varios años después. Es necesario calcular el número de días entre las dos fechas. Algunos bonos pagan cupones semestrales, mientras que otros pagan cupones anuales. Algunos utilizan el año comercial de 360 días, otros se basan en el año real. Con los métodos estudiados en este libro, es posible tomar en cuenta todas estas complicaciones. Sin embargo, para evitar el tedio, es preferible usar la calculadora financiera. El módulo BONO de la calculadora HP-17BII está diseñado específicamente para facilitar cualquier tipo de cálculos relacionados con los bonos.



Al pulsar la tecla BONO aparece en la pantalla: 30/360 semianual. Esto quiere decir que la calculadora propone como tipo de bono el que paga cupones semestrales y que utiliza un mes de 30 días y un año de 360 días. Si no estamos de acuerdo con esta especificación oprimimos el botón TIPO y obtenemos el siguiente submenú:

360	R/R	SEMI	ANU

360 año comercial de 360 días y un mes de 30 días,
R/R año y mes con el número de días reales,
SEMI pago de cupón semestral,
ANU pago de cupón anual.

Después de los ajustes necesarios regresamos al menú del bono oprimiendo la tecla EXIT. Veremos el siguiente menú:

TIPO	PAGO	MAD	CPN%	DMDA	OTROS

TIPO permite determinar el tipo del bono,
PAGO fecha de compra del bono,
MAD fecha de maduración del bono o fecha de su venta,
CPN% tasa de cupón (tasa contractual),
DMDA valor nominal del bono, valor de redención o precio de su venta. Por *default* el valor nominal utilizado por la calculadora es de $100. Al pulsar la tecla CLEAR DATA este valor está registrado en DMDA. Si el bono se vende antes del vencimiento será necesario introducir el precio de venta en el registro DMDA.

EJEMPLO 1

Un bono del Tesoro de Estados Unidos madura el 22 de septiembre de 2008 y ofrece una tasa de cupón de 6.25%. El bono utiliza el calendario de tipo real/real y el pago de cupones es semestral. ¿Qué precio puede pagar el 24 de julio de 1997 por este bono si desea obtener un rendimiento de 7.75%?

Solución: En la tabla que sigue presentamos la secuencia de teclas, la pantalla y algunas observaciones empezando desde el menú principal:

Teclas	Pantalla	Comentarios
FIN, BONO, CLEAR DATA	R/R SEMIANUAL	Entramos en el módulo BONO
24.071997 PAGO	PAGO = 24.07.1997 JUE	Introducimos la fecha de compra
22.092008 MAD	MAD = 22.09.2008 LUN	La fecha de maduración
6.25 CPN%	CPN% = 6.25	Introducimos la tasa de cupón
OTROS,7.75 RED%	RED% = 7.75	El rendimiento deseado

Terminada la entrada de los datos pulsamos la tecla PRECIO y en la pantalla aparece la respuesta: PRECIO 5 88.91. Al pulsar la tecla ACUM obtenemos: 2.1. ACUM es el interés acumulado desde la fecha del último pago del cupón hasta la fecha de pago, por cada $100 del valor facial. Es el derecho a la parte proporcional del siguiente cupón, por lo que debe sumarse al precio para obtener el precio neto de $91.02.

Supongamos que el precio del bono en el mercado es de $90.5. ¿Cuál es el rendimiento implícito en este precio? Introducimos $90.5 en el PRECIO y pulsamos la tecla RED%. Después de unos segundos, en la pantalla aparece la respuesta: RED% = 7.52.

Observación: La calculadora computa el precio del bono por cada $100 de valor nominal. Si el valor nominal es $1 000 en lugar de $100, el precio proporcionado por la calculadora se multiplica por 10.

Para que el lector aprecie mejor las ventajas de usar el módulo BONO resolveremos el ejemplo 1 con el módulo VDT.

Primero utilizamos el módulo CALE para calcular el número de días entre la fecha de compra y la fecha de venta del bono.

Desde el menú principal pulsamos la tecla CALE y después la tecla CALC. Como FECHA 1 introducimos 24.071997. La pantalla dice: FECHA1 = 24.07.1997 JUE. Como FECHA2 introducimos 22.092008. La pantalla dice FECHA2 = 22.09.2008 LUN. Al pulsar la tecla DÍAS obtenemos el número de días entre las dos fechas: días reales = 4 078. En nuestro caso, es preferible calcular el número de días en el formato 365D.

Al utilizar el año de 365 días, el número de días es 4 075. Esto equivale a 11.16 años o 22.32 semestres. Dada la tasa de cupón de 6.25%, el interés anual es de $6.25 y el cupón semestral es de $3.125. El valor nominal es de $100. Ahora podemos utilizar el módulo VDT:

2 NO.P AÑO MODO FINAL, N = 22.3288, %IA = 7.75, PAGO = 3.125, VF = 100

Al oprimir la tecla VA, obtenemos la respuesta: VA = 88.92.

Para obtener el rendimiento, si el precio es de $90.5, introducimos este valor (con el signo cambiado) en VA y, al oprimir la tecla %IA, obtenemos la respuesta: %IA = 7.52.

EJEMPLO 2[9]

El 2 de mayo de 1988 se compra un bono colectivo con la tasa de cupón de 6% que madura el 3 de marzo de 2007. El bono utiliza el calendario 30/360 y los cupones se pagan semestralmente. ¿Cuál tiene que ser el precio del bono para que dé un rendimiento de 5.7%? El bono se vende el 3 de marzo de 1991 (fecha de cupón) con un valor de $102.75. ¿Cuál es el rendimiento del periodo de tenencia?

[9] Ejemplo tomado del instructivo de la calculadora, con algunos cambios en la redacción.

Solución: En la tabla que sigue se presentan los pasos necesarios para la solución, junto con algunos comentarios.

Teclas	Pantalla	Comentarios
FIN, BONO, CLEAR DATA	30/360 SEMIANUAL	Ajustamos el tipo del bono
2.051988 PAGO	PAGO = 02.05.1988 LUN	Introducimos la fecha de compra
3.032007 MAD	MAD = 3.03.2007 SAB	La fecha de maduración
6 CPN%	CPN% = 6.00	Introducimos la tasa de cupón
OTROS, 5.7 RED%	RED% = 5.70	El rendimiento deseado

Al pulsar la tecla PRECIO obtenemos la respuesta: PRECIO = 103.428. Esto contesta la pregunta *a*).

Para contestar la pregunta *b*) tenemos que cambiar la fecha de maduración por la fecha de venta y el valor nominal por el precio de venta.

Teclas	Pantalla	Comentarios
3.031991 MAD	MAD = 03.03.1331 DOM	La fecha de maduración
102.75 DMDA	DMDA = 102.75	Introducimos el precio de venta

Al pulsar la tecla RED% obtenemos la respuesta a la pregunta *b*): RED% = 5.58.

Respuestas:

a) Para tener un rendimiento de 5.7% el bono debe venderse a $103.43.

b) Con una venta antes del vencimiento, el rendimiento del periodo de tenencia es de 5.58%.

El módulo BONO también sirve para calcular el precio y el rendimiento de los bonos de cupón cero (de descuento puro). Lo único que se requiere es poner cero como tasa de cupón.

EJEMPLO 3

Un bono de descuento puro fue comprado el 11 de agosto de 1997 y madurará el 30 de junio de 2005. Es un bono semestral[10] que usa el calendario 30/360 y su rendimiento al vencimiento es de 9%. ¿Cuál es el precio del bono?

Solución:

Teclas	Pantalla	Comentarios
FIN, BONO, CLEAR DATA	30/360 SEMIANUAL	Entramos en el módulo BONO
11.081997 PAGO	PAGO = 11.08.1997 LUN	Introducimos la fecha de compra
30.062005 MAD	MAD = 30.06.2005 JUE	La fecha de maduración
0 CPN%	CPN% = 0.00	Introducimos la tasa de cupón
OTROS, 9 RED%	RED% = 9.00	El rendimiento deseado

[10] En el contexto de los bonos de cupón cero, el hecho de que el bono sea semestral significa que su tasa de rendimiento se compone dos veces al año.

Al pulsar la tecla PRECIO obtenemos la respuesta: PRECIO = 49.94.

Respuesta: Para tener un rendimiento de 9%, el bono debe venderse a $49.94.

Si el bono pudiera comprarse a $45, su rendimiento sería de 10.38%.
Secuencia: PRECIO = 45, RED% = 10.38.

Resulta relativamente fácil resolver este problema en el módulo VDT.

Primero calculamos el número de días entre la fecha de compra y la fecha de venta del bono en el módulo CALE. Al utilizar el año de 360 días el número de días entre esas dos fechas es 2,8309. Esto equivale a 7.88 años o 15.77 semestres. El valor nominal es de $100. La secuencia de pasos es la siguiente:

2 NO.P AÑO MODO FINAL, N = 15.77, %IA = 9, PAGO = 0, VF = 100

Al oprimir la tecla VA obtenemos la respuesta: VA = −49.94.

Ahora introducimos $45 en VA (con signo negativo) y, al apretar la tecla %IA, obtenemos el resultado: 10.38%.

Como podemos observar, hay varias maneras de resolver un problema. Algunas veces hacerlo con diferentes métodos sirve para fortalecer nuestra confianza en el resultado.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

¿Qué precio debe pagar el 16 de junio de 1999 por un bono del Tesoro que vence el 1 de mayo de 2002 si desea obtener un rendimiento de 7.25? El valor nominal es de $100, el cupón es semestral, la tasa de cupón es de 6.5% y el calendario de 360/30.

Respuestas: Precio de mercado: $98.07, precio neto: $98.88.

FÓRMULAS DEL CAPÍTULO

Valor del cupón $C = B_N \times R_C$	Rendimiento corriente $R_{\text{corriente}} = \dfrac{C}{B_0}$
Precio del bono con cupones $B_0 = \dfrac{C}{y}\left[1 - \dfrac{1}{(1+y)^T}\right] + \dfrac{B_N}{(1+y)^T}$	Rendimiento al vencimiento compuesto realizado $y = \left[(1+R_1)(1+R_2)\cdots(1+R_N)\right]^{1/N} - 1$
Rendimiento del periodo de tenencia $B_0 = \dfrac{C}{h}\left(1 - \dfrac{1}{(1+h)^m}\right) + \dfrac{B_m}{(1+h)^m}$	

Términos clave

Bono redimible
Cupón
Curva de rendimiento
Derecho al cupón
Descuento
Estructura a plazos
Patrón de rendimientos crecientes
Precio neto
Prima
Rendimiento al vencimiento
Rendimiento corriente
Rendimiento del periodo de tenencia
Rendimiento hasta la redención
Riesgo de precio
Riesgo de reinversión
Supuesto de reinversión de cupones
Tasa de cupón
Tasas a plazo
Teoría de las expectativas
Valor de redención

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. ¿A qué precio debe usted comprar un bono de $1 000 a 15 años, con el cupón anual y la tasa de cupón de 8.5%, para obtener el rendimiento al vencimiento de 10.4%?
2. Un inversionista que desea obtener el rendimiento al vencimiento de 21% contempla un bono a tres años con valor nominal de $1 000 que ofrece cupones trimestrales, con la tasa de cupón de 18%. Al vencimiento el bono se redime a 108% de su valor nominal. ¿Cuánto puede ofrecer el inversionista por este bono?
3. Un bono con valor nominal de $100 a 10 años tiene la tasa de cupón de 11% (cupón semestral) y se vende a $96. Calcule:
   a) el rendimiento corriente del bono,
   b) el rendimiento al vencimiento del bono.
   c) qué precio debe tener el bono para ofrecer el rendimiento al vencimiento de 12%.
4. Un bono con el valor nominal de $100 a 20 años a 9% (cupón semestral) se vende a $98.
   a) ¿cuál es el rendimiento al vencimiento del bono?,
   b) supongamos que después de seis años la tasa de interés para este tipo de bonos sube a 11%. ¿A qué precio se vendería el bono en su sexto año?,
   c) ¿cuál sería el rendimiento del periodo de tenencia del comprador original?
5. Un bono paga el cupón semestral de $65. El bono es vendido 72 días después de la fecha de cupón. Calcule el derecho al cupón que el comprador tiene que pagar al vendedor.
6. Un bono semestral a cinco años con valor nominal de $1 000 y la tasa de cupón de 9% vence el 15 de noviembre de 2004. El bono fue comprado el 3 de enero de 2 000 con rendimiento al vencimiento de 11.7%. Calcule:
   a) el precio de mercado,
   b) el derecho al cupón,
   c) el precio neto del bono.
7. Un bono semestral a cuatro años con valor nominal de $1 000 y tasa de cupón de 8% ofrece el rendimiento al vencimiento de 10.4%. Calcule:

a) el precio del bono,

b) el rendimiento semestral que se deriva del descuento,

c) sumando el resultado del punto *b*) al cupón, calcule el rendimiento requerido.

8. Un bono con valor nominal de $1 000 a 10 años, con cupón semestral y tasa de cupón de 14% se vende a $975. El bono puede ser redimido después de cinco años a un precio de redención de $1 070. Calcule:

a) el rendimiento al vencimiento del bono,

b) el rendimiento hasta la redención.

9. Después de un año, el bono del problema anterior se vende a $950. Calcule el rendimiento del periodo de tenencia.

10. Un bono anual con valor nominal de $1 000 a 20 años y tasa de cupón de 9% se vende con el rendimiento de 10.15%. Después de un año el dueño quiere vender el bono, pero entonces el rendimiento de este tipo de instrumentos subió a 12.5%. Calcule:

a) el precio de compra del bono,

b) el precio de venta después de un año,

c) el rendimiento del periodo de tenencia.

11. Un bono con valor nominal de $100 madura el 30 de diciembre de 2010. El bono utiliza el calendario 30/360 y el pago de cupón es semestral. La tasa de cupón es de 7.8%.

a) ¿qué precio puede pagar por el bono el 27 de abril de 1998 si desea obtener un rendimiento de 8.5%?,

b) supongamos que compra el bono por $95 y lo vende el 20 de agosto de 2002 por $102. ¿Qué rendimiento del periodo de tenencia habrá realizado?

12. Un bono de $100 madura el 15 de septiembre de 2008. El bono utiliza el calendario R/R y paga el cupón semestral, con la tasa de cupón de 9.5%. El bono se compró el 16 de junio de 1999 con el rendimiento de 10.1%. Calcule:

a) el precio de mercado del bono,

b) el derecho al cupón,

c) el precio neto.

CAPÍTULO 13

Estructura a plazos de las tasas de interés

Objetivos del aprendizaje

Después de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

- Interpretar la pendiente de la curva de rendimiento.
- Explicar la teoría de las expectativas de las tasas de interés.
- Comparar las estrategias de inversión en instrumentos a diferentes plazos.
- Calcular la tasa a plazo, a partir de los precios de mercado de los bonos a diferentes plazos.
- Calcular las tasas a plazo de los Cetes.
- Entender la teoría de preferencia por liquidez.
- Utilizar la curva de rendimiento en la toma de decisiones.

CURVA DE RENDIMIENTO

La *curva de rendimiento* (*yield curve*) describe la relación entre el rendimiento y el plazo de los instrumentos de renta fija. Es la presentación gráfica de la estructura a plazos de las tasas de interés. Si los instrumentos a plazos más largos tienen mayores rendimientos que los instrumentos a plazos más cortos, decimos que la estructura a plazos tiene un *patrón de rendimientos crecientes con el vencimiento*. Dicho de otra manera, la pendiente de la curva de rendimiento es positiva. En el caso contrario, decimos que el patrón de rendimientos es decreciente. Un ejemplo del patrón creciente: en el mismo día un Cete a 28 días rinde 9.2%, uno a 91 días rinde 9.5% y uno a 182 días rinde 9.95%.

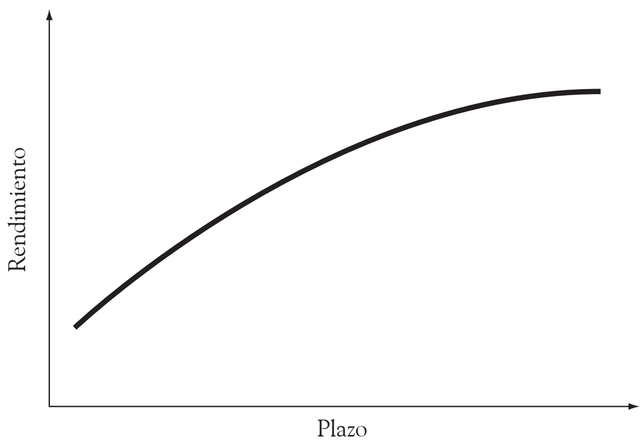
Una observación de los datos sugiere que las tasas a largo plazo son generalmente más altas y más estables que las tasas a corto plazo. Lo contrario sucede con los precios de los bonos.

Los precios de los bonos a largo plazo son más volátiles que los de corto plazo.

La *curva de rendimiento pura* (*the pure yield curve*) se construye con base en los rendimientos de bonos de cupón cero. Si lo único que tenemos son los bonos con cupones, cada cupón debe ser tratado como si fuera un bono de cupón cero. Los detalles técnicos sobre cómo construir una curva de rendimiento con base en los precios de los bonos con cupones están disponibles en textos de finanzas más avanzados[1]. Aquí sólo damos un ejemplo de la diferencia de rendimiento de los bonos con distinta tasa de cupón, incluso si para el cálculo de su precio se usan las mismas tasas de interés.

Figura 13.1

La curva de rendimiento típica muestra un patrón de rendimientos crecientes con el plazo.



EJEMPLO 1

El bono *A* con valor nominal de $1 000 a tres años ofrece cupones anuales de $40. El bono *B* tiene el mismo valor y plazo, pero ofrece cupones anuales de $120. Se conocen con certidumbre las tasas a corto plazo (a un año) en cada uno de los siguientes tres años: 8, 9.5 y 11%. Calcule los precios y los rendimientos al vencimiento de los dos bonos.

[1] Zvi Bodie y otros, *Investments*, 6a. ed., Irwin, McGraw-Hill, 2005.

Solución: El precio de un bono es el valor presente de sus flujos de efectivo.

$$B_A = \frac{40}{1.08} + \frac{40}{1.095^2} + \frac{1\,040}{1.11^3} = 830.84$$

Dado que la tasa de cupón es mucho más baja que las tasas a corto plazo durante la vida del bono, éste se vende con mucho descuento.

El rendimiento al vencimiento es la tasa de descuento que iguala el valor presente de los flujos de efectivo con el precio del bono.

$$\frac{40}{1+y} + \frac{40}{(1+y)^2} + \frac{1\,040}{(1+y)^3} = 830.84 \quad \Rightarrow \quad y_A = 10.91\%$$

El rendimiento al vencimiento es la media ponderada por el peso (*dollar weighted return*). Ya que el mayor flujo de efectivo se produce en el tercer año, el rendimiento al vencimiento está muy cercano al rendimiento de este año (11%).

El precio y el rendimiento del bono *B* se calcula de manera análoga:

$$B_B = \frac{120}{1.08} + \frac{120}{1.095^2} + \frac{1\,120}{1.11^3} = 1\,030.13$$

$$\frac{120}{1+y} + \frac{120}{(1+y)^2} + \frac{1\,120}{(1+y)^3} = 1\,030.13 \quad \Rightarrow \quad y_B = 10.77\%$$

Bonos con cupones con el mismo plazo pueden tener diferentes rendimientos, en función de su tasa de cupón.

Como la tasa de cupón del bono *B* es mayor que las tasas a corto plazo durante su vida, el bono *B* se vende con una prima. El rendimiento al vencimiento del bono *B* es menor que el del bono *A*, puesto que sus flujos de efectivo se producen más temprano y sólo pueden ser reinvertidos a tasas más bajas.

En vista de que el rendimiento de los bonos con cupones depende de la tasa de cupón, estos bonos no pueden ser utilizados para construir la curva de rendimiento en forma directa.

TEORÍA DE LAS EXPECTATIVAS

El hecho de que los instrumentos a largo plazo ofrezcan tasas más altas puede deberse a expectativas de inflación creciente o a la preferencia por la liquidez.

Una de las teorías más importantes para explicar la estructura de plazos de las tasas de interés es la *teoría de las expectativas*. Según ésta, las *tasas a corto plazo* (*short interest rates*) esperadas en el futuro son iguales a las tasas a plazo calculadas a partir de los precios de los bonos. Si las tasas de los instrumentos a plazos más largos son más altas que las tasas de los instrumentos a corto plazo, se debe a que el mercado espera que las tasas en el futuro sean más altas que en el presente.

Las tasas a corto plazo que prevalecerán en el futuro son desconocidas. Lo mejor que podemos hacer es calcular las tasas a plazo (*forward rates*) con base en los precios conocidos de los bonos a diferentes plazos.

Antes de proseguir, tenemos que definir los tres tipos de interés que utilizaremos en la exposición.

La *tasa spot* es el rendimiento al vencimiento de los bonos cupón cero a diferentes plazos, calculado desde hoy hasta el vencimiento.

La *tasa a corto plazo* en el periodo n es la tasa de interés de un bono cupón cero a un año, que prevalecerá durante el periodo n.

La *tasa a plazo* del periodo n $({}_{n-1}f_n)$ es el rendimiento de un bono a un año en el periodo n, calculado con base en el rendimiento al vencimiento del bono a n periodos y del bono a $n-1$ periodos.

Por ejemplo, la tasa a plazo en el tercer año es la tasa de rendimiento entre el segundo y tercer año calculada a partir de los precios de los bonos a tres y a dos años. La designaremos ${}_2f_3$ o f_3.

En la exposición utilizaremos los siguientes símbolos:

${}_0R_T$	rendimiento al vencimiento de un bono a T años,
${}_t f_{t+1}$	tasa a plazo de un año, observada desde el año t hasta el año $(t+1)$,
$E({}_tR_{t+1})$	tasa de interés esperada en el periodo t.

Las tasas de interés esperadas en el futuro son iguales a las tasas a plazo calculadas a partir de los precios de los bonos.

Según el principio fundamental de la teoría de las expectativas:

$${}_t f_{t+1} = E\left({}_t R_{t+1}\right)$$

La tasa a plazo se basa en los supuestos, bastante restrictivos, de que los inversionistas no tienen preferencia por el plazo y de que son neutrales respecto al riesgo.

La tasa a plazo es la tasa de equilibrio que iguala el rendimiento de un bono cupón cero a n periodos con el rendimiento de un bono cupón cero a $(n-1)$ periodos, invertido en el periodo entre $(n-1)$ y n en un bono de cupón cero a un periodo. Es más fácil explicar este concepto mediante un ejemplo.

Tenemos a un inversionista que desea invertir \$100 a dos años. El inversionista puede seguir dos estrategias alternativas:

1. Comprar un bono a dos años con un rendimiento de 9%.
2. Comprar un bono a un año que rinde 8% y después reinvertir el producto de venta de este bono en otro a un año con el rendimiento esperado en el segundo año, $E({}_1R_2)$.

Se supone que los mercados son eficientes y que los inversionistas no tienen ninguna preferencia por el plazo y consideran que el bono a dos años tiene el mismo riesgo que el bono a un año.

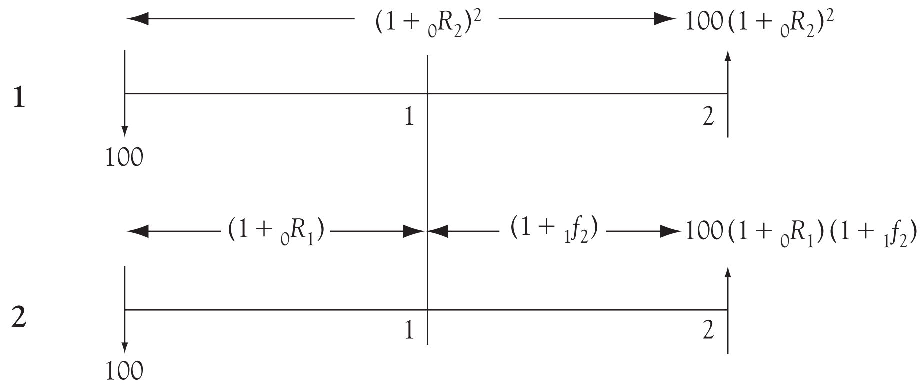
Si se cumplen esos supuestos, la competencia entre los inversionistas hace que el rendimiento final de las dos estrategias de inversión sea idéntica.

El valor final de la primera estrategia es fácil de calcular:

$$\text{Valor final (1)} = 100(1.09)^2 = 118.81$$

Figura 13.2

Dos alternativas de invertir $100 a dos años.



El valor final de la segunda estrategia depende de la tasa esperada sobre el bono a un año durante el segundo año, $E({}_1R_2)$:

$$\text{Valor final (2)} = 100(1.08)[1 + E({}_1R_2)]$$

Según la teoría de las expectativas, las dos estrategias deben dar el mismo resultado. Si aceptamos esto, podemos calcular el valor esperado de la tasa de interés en el segundo año de la siguiente manera:

$$118.81 = 108[1 + E\,({}_1R_2)] \qquad \text{donde} \qquad E({}_1R_2) = 0.1001 = 10.01\%$$

Un inversionista selecciona la segunda estrategia (un bono a un año con un rendimiento más bajo, seguido por otro bono a un año), si espera que la tasa de interés en el segundo año suba. Concretamente, si el rendimiento de un bono a un año en el segundo año es de 10.01%, para un inversionista que tiene un horizonte de inversión de dos años, los resultados financieros de las dos estrategias serán idénticos.

Si la tasa de interés en el segundo año es mayor que 10.01%, el inversionista que optó por la segunda estrategia obtendrá un rendimiento adicional. En el caso contrario, obtendrá un rendimiento menor que con la primera estrategia.

Si los inversionistas creen que la tasa en el segundo año no será mayor que la tasa del primero, tratan de comprar bonos a dos años para "amarrar" el rendimiento a nivel de 9%. La demanda de bonos a dos años subirá sus precios y bajará su rendimiento. En cambio, una menor demanda de los bonos a un año reducirá sus precios y aumentará su rendimiento.

En un mundo sin incertidumbre y sin marcadas preferencias por el plazo, el rendimiento que se recibe en cada año de los bonos a diferentes plazos debe ser igual.

Según la teoría de las expectativas, la competencia entre los inversionistas seguirá hasta que las tasas a plazo se igualen a las tasas esperadas a lo largo del periodo de tenencia. En otras palabras, al comparar el precio del bono a dos años con el precio del bono a un año podemos calcular la tasa de interés que el mercado espera que prevalezca entre el primer y segundo año. Esta tasa se llama tasa a plazo (*forward*) entre el año uno y el dos; simbólicamente la designamos ${}_1f_2$.

Las expectativas acerca de los cambios de las tasas de interés en el futuro afectan tanto las estrategias de los deudores como las de los acreedores. Si se espera que las tasas suban, los deudores (emisores) tratarán de endeudarse a largo plazo, en un intento por amarrar las tasas actuales más bajas. Esto aumentará la oferta de bonos a largo plazo, empujando sus precios a la baja y aumentando su rendimiento. En cambio, los acreedores (inversionistas) procurarán ofrecer crédito a corto plazo evitando los bonos a largo plazo. Esto reducirá la demanda de bonos a largo plazo y aumentará su rendimiento. Los deseos de los acreedores de prestar a corto plazo y los deudores de pedir prestado a largo plazo refuerzan el patrón de rendimientos crecientes a plazo.

Sucede lo contrario si el mercado espera una reducción de las tasas de interés.

La tasa *forward* se calcula a partir de los precios de mercado de los bonos. Al precisar el procedimiento que aplicamos en nuestro ejemplo tenemos:

Rendimiento de la estrategia 1 = rendimiento de la estrategia 2

$$(1 + {}_0R_2)^2 = (1 + {}_0R_1)\,(1 + {}_1f_2)$$

donde ${}_0R_2$ es el rendimiento al vencimiento del bono a dos años,
${}_0R_1$ es el rendimiento al vencimiento de un bono a un año,
${}_1f_2$ es la tasa *forward* entre el primer y segundo año.

La tasa a plazo del primer año al segundo ${}_1f_2$ es:

$$1 + {}_1f_2 = \frac{(1 + {}_0R_2)^2}{(1 + {}_0R_1)^1}$$

En términos generales, según la teoría de las expectativas, el rendimiento al vencimiento de un bono a T años debe ser igual al promedio geométrico de las tasas a plazo a lo largo de su vida:

$$(1 + {}_0R_T)^T = (1 + {}_0R_1)(1 + {}_1f_2)(1 + {}_2f_3)\cdots(1 + {}_{T-1}f_T)$$

o

$$1 + {}_0R_T = \left[(1 + {}_0R_1)(1 + {}_1f_2)(1 + {}_2f_3)\cdots(1 + {}_{T-1}f_T)\right]^{1/T}$$

Si tenemos los rendimientos de un bono a dos años y otro a tres podemos calcular la tasa de interés a plazo del segundo al tercer año, implícita en los precios de estos bonos. Para lograrlo, hacemos el siguiente desarrollo:

$$\frac{(1 + {}_0R_3)^3}{(1 + {}_0R_2)^2} = \frac{(1 + {}_0R_1)(1 + {}_1f_2)(1 + {}_2f_3)}{(1 + {}_0R_1)(1 + {}_1f_2)} = 1 + {}_2f_3$$

Así obtenemos una fórmula para el rendimiento a plazo del segundo al tercer año generalizable a dos periodos consecutivos cualesquiera:

$$\boxed{1 + {}_2f_3 = \frac{(1 + {}_0R_3)^3}{(1 + {}_0R_2)^2}}$$

La generalización consiste en una sustitución adecuada de los subíndices. Si, por ejemplo, tenemos los rendimientos de los bonos a cuatro y cinco años, podemos calcular la tasa a plazo del cuarto año al quinto:

$$1 + {}_4f_5 = \frac{(1 + {}_0R_5)^5}{(1 + {}_0R_4)^4}$$

Al emplear los símbolos, tenemos:

$$\boxed{1 + {}_tf_{t+1} = \frac{(1 + {}_0R_{t+1})^{t+1}}{(1 + {}_0R_t)^t}}$$

Si los precios de los bonos son a diferentes plazos, podemos calcular los rendimientos a plazo implícito en los precios de estos bonos. Con este fin:

1. Calculamos el rendimiento al vencimiento de los bonos a diferentes plazos.
2. Utilizamos la fórmula para el rendimiento a plazo, basada en la teoría de las expectativas.

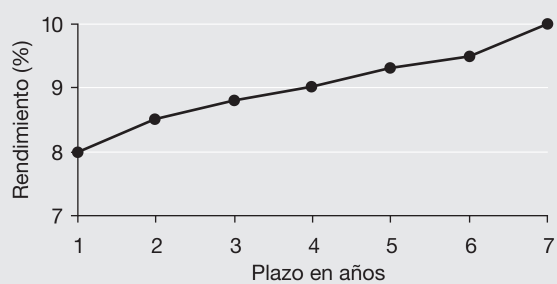
EJEMPLO 1

Con base en los precios de los bonos de cupón cero a diferentes plazos,[2] observados en el mercado, se calcula el rendimiento al vencimiento (las tasa *spot*) de dichos bonos. La información necesaria está resumida en la siguiente tabla:

Plazo (años)	Precio	Rendimiento al vencimiento (%)
1	925.93	8.0
2	849.46	8.5
3	776.45	8.8
4	708.43	9.0
5	641.06	9.3
7	513.16	10.0

a) ¿Cuál es la tasa de interés a plazo para el tercer año?

b) ¿Cuál es la tasa de interés anual promedio para los años quinto y sexto?



[2] El valor nominal de cada bono es de $1 000.

Solución:

a) Aplicamos la fórmula para la tasa a plazo para el tercer año:

$$1 + {}_3f_4 = \frac{(1 + {}_0R_4)^4}{(1 + {}_0R_3)^3} = \frac{1.09^4}{1.088^3} = \frac{1.4116}{1.2879} = 1.096$$

Una solución alternativa es dividir el precio del bono a tres años entre el precio del bono a cuatro años:

$$1 + {}_3f_4 = \frac{B_3}{B_4} = \frac{776.45}{708.43} = 1.096$$

b) Primero calculamos la tasa a plazo a dos años, entre el año quinto y el séptimo, y después sacamos el promedio geométrico.

$$1 + {}_5f_7 = \frac{(1 + {}_0R_7)^7}{(1 + {}_0R_5)^5} = \frac{1.1^7}{1.093^5} = \frac{1.9487}{1.5599} = 1.2492$$

Podemos obtener el mismo resultado dividiendo el bono a cinco años entre el bono a siete años:

$$1 + {}_5f_7 = \frac{B_5}{B_7} = \frac{641.06}{513.16} = 1.2492$$

La tasa a dos años es de 24.92%. La tasa promedio anual es la raíz cuadrada de 1.2492 menos uno.

$${}_5f_6 = {}_6f_7 = 1.2492^{1/2} - 1 = \sqrt{1.2492} - 1 = 0.1177 = 11.77\%$$

Respuestas:

a) La tasa a plazo para el tercer año, implícita en los precios de los bonos, es 9.6%.

b) La tasa a plazo promedio para el quinto, sexto y séptimo año es 11.77%.

Observaciones:

- Cuando la estructura a plazos de las tasas de interés muestra un patrón de rendimientos crecientes (como en el ejemplo 1), las tasas a plazo para los últimos años de los bonos son mayores que el rendimiento al vencimiento.
- Lo contrario sería cierto si el patrón de rendimientos fuese decreciente, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2

La siguiente tabla presenta los rendimientos al vencimiento de bonos a diferentes plazos:

Plazo (años)	Rendimiento al vencimiento (%)
1	10.0
2	9.5
3	9.0
4	8.3
5	8.0

a) ¿Cuál es la tasa forward para el segundo año?

b) ¿Cuál es la tasa forward para el cuarto año?

Solución:

a) $$1 + {}_2f_3 = \frac{(1 + {}_0R_3)^3}{(1 + {}_0R_2)^2} = \frac{1.09^3}{1.095^2} = \frac{1.295}{1.199} = 1.0801$$

b) $$1 + {}_4f_5 = \frac{(1 + {}_0R_5)^5}{(1 + {}_0R_4)^4} = \frac{1.08^5}{1.083^4} = \frac{1.4693}{1.3757} = 1.0681$$

Respuestas: *a*) la tasa a plazo para el segundo año es 8.01%,

b) la tasa a plazo para el cuarto año es 6.81%.

Cuando el patrón de rendimientos de los bonos es decreciente, el rendimiento a plazos de los últimos años es menor que el rendimiento al vencimiento.

La técnica para calcular las tasas a plazo presentada arriba es muy útil para determinar las estrategias de inversión y de endeudamiento. También es utilizada en la toma de decisiones en contratos a futuro sobre las tasas de interés.

Cuando los plazos son más cortos que un año, es necesario modificar un poco el procedimiento esbozado. En lugar del interés compuesto se utiliza el interés simple.

EJEMPLO 3

La siguiente tabla presenta los rendimientos de los Cetes a diferentes plazos:

Plazo (días)	Rendimiento al vencimiento (%)
28	18.70
91	19.60
82	20.50
350	20.85

a) ¿Cuál es la tasa de interés a plazo de 63 días dentro de 28 días?

b) ¿Cuál es la tasa a plazo de 168 días dentro de 182 días?

Solución:

a) Si invertimos $1 a 28 días, al cumplirse el plazo tendremos:

$$1 + \frac{0.187}{360} \times 28 = 1.0145$$

Si invertimos $1 a 91 días, al cumplirse el plazo tendremos:

$$1 + \frac{0.196}{360} \times 91 = 1.0495$$

Para calcular la tasa a plazo vigente entre el día 28 y 91 despejamos ${}_{28}f_{91}$ de la siguiente ecuación:

$$1.0145\ (1 + {}_{28}f_{91}) = 1.0495 \qquad \Rightarrow \qquad {}_{28}f_{91} = 0.0345 = 3.45\%$$

Así, 3.45% es la tasa a plazo de 63 días dentro de 28 días. Para anualizar esta tasa la dividimos entre 63 y multiplicamos por 360. El resultado es 19.71%. Si consideramos que dentro de 28 días las tasas a 63 días serán más altas, podemos vender el contrato a plazo sobre las tasas de interés. Si nuestras expectativas se cumplen obtendremos una ganancia. En el caso contrario sufriremos una pérdida. En cambio, si esperamos que las tasas a 63 días dentro de 28 días sean más bajas, podemos comprar un contrato a plazo sobre las tasas de interés.

b) Si invertimos $1 a 350 días, en 350 días tendremos:

$$1 + \frac{0.2085}{360} \times 350 = 1.2027$$

Si invertimos $1 a 182 días, al cumplirse el plazo tendremos:

$$1 + \frac{0.205}{360} \times 182 = 1.1036$$

Para calcular la tasa a plazo vigente entre los días 182 y 350 despejamos ${}_{182}f_{350}$ de la siguiente ecuación:

$$1.1036\ (1 + {}_{182}f_{350}) = 1.2027 \qquad \Rightarrow \qquad {}_{182}f_{350} = 0.0898 = 8.98\%$$

Para anualizar esta tasa, la dividimos entre 168 y multiplicamos por 360. El resultado es 19.23%, que puede parecer extraño porque afirmamos que si el patrón de rendimientos a plazo es creciente, las tasas a plazo son mayores que las tasas presentes. La contradicción es aparente, porque si tomáramos las tasas efectivas a 182 y 350 días, nos daríamos cuenta de que el patrón de rendimientos es realmente decreciente: la tasa efectiva a 182 días es igual a 21.54% y la tasa efectiva a 350 días es de tan sólo 20.91%.

Respuestas: *a*) la tasa a plazo a 63 días dentro de 28 días es de 19.71%,

b) la tasa a plazo a 168 días dentro de 182 días es de 19.23%.

Para fortalecer la comprensión de la metodología, calculemos la tasa a plazo a 91 días dentro de 91 días, consolidando nuestro procedimiento en una sola fórmula.

$$ {}_{91}f_{182} = \left(\frac{1 + 0.205\,\frac{182}{360}}{1 + 0.196\,\frac{91}{360}} - 1 \right) \frac{360}{91} = 0.2039 = 20.39\% $$

La tasa a plazo a 91 días dentro de 91 días es de 20.39%.

Al generalizar la fórmula utilizada para resolver el problema 3, presentamos la fórmula para la tasa a plazo de los Cetes (y otros certificados con el vencimiento menor a un año).

$$ \boxed{ {}_{n}f_{m} = \left(\frac{1 + R_m\,\frac{m}{360}}{1 + R_n\,\frac{n}{360}} - 1 \right) \frac{360}{m - n} } $$

donde

${}_{n}f_{m}$	es la tasa a plazo de un instrumento a $(m - n)$ días, vigente dentro de n días,
m	es el plazo en días del Cete a un plazo más largo,
R_m	es la tasa de interés anual del Cete a un plazo más largo,
n	es el plazo del Cete a un plazo más corto,
R_n	es la tasa de interés anual del Cete a un plazo más corto,
$m - n$	es el plazo en días desde el vencimiento del Cete a un plazo más corto hasta el vencimiento del Cete a un plazo más largo.

EJEMPLO 4

Continuamos con el ejemplo 3. Usted tiene una cuenta por cobrar de un \$1 000 000 dentro de 91 días. Al recibir el dinero planea invertirlo en Cetes a 91 días, pero cree que las tasas de interés pueden bajar y desea amarrar el rendimiento actual. Con este fin, compra un contrato a plazo sobre la tasa de interés (posición larga). El contrato establece que si dentro de 91 días la tasa de interés de los Cetes a 91 días es menor que 20.39%, el banco (o la contraparte que asume la posición corta en el contrato) le va a pagar la diferencia de rendimiento sobre la cantidad de \$1 000 000. Después de 91 días, la tasa de interés sobre los Cetes a 91 días es de 19.2%. ¿Cuánto gana con su contrato a plazo?

Solución: Hay dos maneras de resolver este problema:

1. El contrato le garantiza el rendimiento de 20.39% sobre los Cetes a 91 días dentro de 91 días, sobre la cantidad de \$1 000 000. Si el rendimiento efectivamente fuese de 20.39%, después de 91 días tendría:

$$ 1\,000\,000\left(1 + \frac{0.2039}{360} \times 91\right) = 1\,051\,540.88 $$

En realidad, después de 91 días, el rendimiento de los Cetes es apenas de 19.2%. Si invierte a esta tasa, después de 91 días va a tener:

$$1\,000\,000\left(1+\frac{0.192}{360}\times 91\right)=1\,048\,533.33$$

Así, a consecuencia de la baja de las tasas de interés, puede ganar $3 007.55 menos de lo que hubiera ganado. El banco le tiene que pagar el valor presente (dentro de 91 días) de esta cantidad. Como tasa de descuento se usa la nueva tasa de interés.

$$VP(3\,007.55)=\frac{3\,007.55}{1+\frac{0.192}{360}\times 91}=2\,868.34$$

2. La diferencia en las tasas de interés es: 20.39 – 19.2 = 1.19%. Al ajustar esta tasa al periodo de 91 días y al aplicarla a $1 000 000, obtenemos $3 007.55. El valor presente de esta cantidad es $2 868.34.

Respuesta: Si las tasas de interés bajan, su contrato a plazo sobre las tasas de interés le produce una ganancia de $2 868.34, apenas lo suficiente para obtener el mismo rendimiento que hubiera obtenido si las tasas no hubieran bajado.

En otras palabras, el contrato a plazo sobre las tasas de interés cubre el riesgo de las tasas de interés, en este caso, la posibilidad de que las tasas bajen. El lado oscuro de la cobertura es que elimina la ganancia adicional si las tasas de interés suben.

Supongamos que en el ejemplo 4, después de 91 días, la tasa de interés sobre los Cetes a 91 días es de 22.5%. Ahora, usted tiene que pagar la diferencia al banco que le vendió el contrato a plazo. A continuación calculamos esta diferencia:

$$22.5\% - 20.39\% = 2.11\%$$

$$(2.11/360)91 = 0.5334\%$$

0.5334% de $1 000 000 es $5 333.61

VP (5 333.61) = $5 046.58 (al utilizar como tasa de descuento 22.5% ajustada a 91 días).

Después de 91 días tiene que pagar a la contraparte que asumió la posición corta en el contrato a plazo la cantidad de $5 046.58. En otras palabras, la cobertura le privó de una ganancia adicional de ese mismo monto.

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

El rendimiento de un bono a cinco años es de 4.6%, el rendimiento de un bono a 10 años es de 5.9%. Calcule la tasa a plazo promedio entre el quinto y décimo año implícita en estos datos.

Respuesta: 7.22%.

TEORÍA DE LA PREFERENCIA POR LIQUIDEZ

Si la curva de rendimiento tiene pendiente positiva significa que las tasas a plazo son mayores que el rendimiento al vencimiento hasta la fecha. Matemáticamente se expresa:

$$_0R_{t+1} > {}_0R_t \qquad \text{si y sólo si} \qquad {}_tf_{t+1} > {}_0R_t$$

El rendimiento al vencimiento de un instrumento a un plazo es la media geométrica de las tasas a corto plazo de todos los años hasta el vencimiento. Para que la media creciera, la tasa del último periodo tiene que ser mayor que el promedio hasta la fecha. Dado que las tasas a corto plazo del futuro son desconocidas y las aproximamos con las tasas a plazo, la del último periodo debe ser mayor que el promedio.

La teoría de las expectativas interpreta la pendiente positiva de la curva de rendimiento como una expectativa de crecimiento de las tasas de interés en el futuro.

Según la teoría de las expectativas, la tasa *forward* calculada con base en los precios de los bonos es igual a la tasa a corto plazo esperada en el futuro. Si la tasa *forward* es mayor que la tasa a corto plazo actual, la teoría infiere que el mercado espera un incremento de las tasas de interés en el futuro.

La *teoría de la preferencia por liquidez* proporciona una explicación alternativa de la pendiente positiva de la curva de rendimiento. Según este enfoque, dado que los bonos a largo plazo implican un mayor riesgo de precio que los bonos a corto plazo, los inversionistas prefieren invertir a corto plazo. Para invertir a largo plazo necesitan un incentivo especial: la prima de riesgo.

Incluso, si no se espera un incremento de las tasas de interés en el futuro, la demanda de bonos a largo plazo es menor que la de bonos a corto plazo. Además, los emisores prefieren la deuda a largo plazo porque reduce el riesgo de quiebra. En consecuencia, hay una fuerte oferta de los bonos a largo plazo y una limitada demanda. Los precios de los bonos a largo plazo bajan y sus rendimientos suben.

Según la teoría de la preferencia por liquidez, las tasas a plazo son mayores que las tasas esperadas en el futuro debido a la prima de liquidez.

$$_{t-1}f_t > E\left({}_{t-1}R_t\right)$$

$$_{t-1}f_t - E\left({}_{t-1}R_t\right) = \text{prima de liquidez}$$

La prima de liquidez eleva la pendiente de la curva de rendimiento. Tenemos varios casos posibles:

1. El mercado espera que, en el futuro, las tasas de interés permanezcan iguales. Según la teoría de las expectativas, la curva de rendimiento debería ser plana. Según la teoría de la preferencia por liquidez, la curva de rendimiento debe ser ascendente.
2. El mercado espera que las tasas de interés sean mayores en el futuro que en la actualidad. Según la teoría de las expectativas, la curva de rendimiento sería ascendente. Según la teoría de la preferencia por liquidez, la curva de rendimiento debe ser ascendente, pero más empinada que en ausencia de la prima de liquidez.

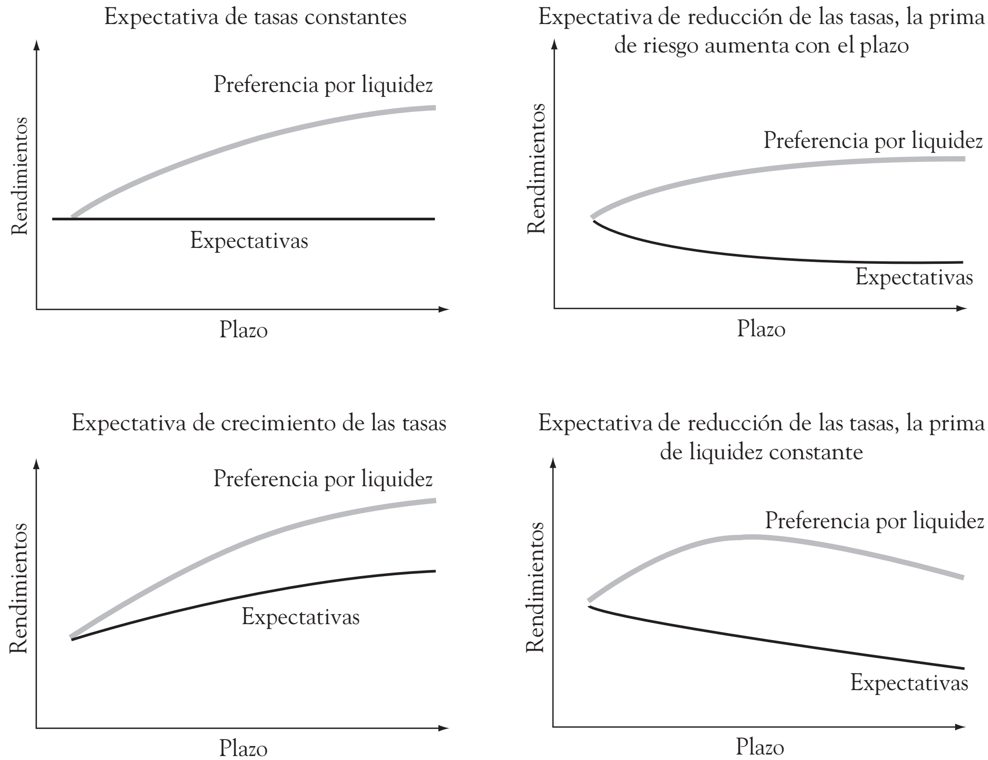


Figura 13.3

Curvas de rendimiento según la teoría de las expectativas y la teoría de la preferencia por liquidez.

3. El mercado espera que las tasas de interés sean en el futuro menores que en la actualidad. Según la teoría de las expectativas, la curva de rendimiento tendría pendiente negativa. Según la teoría de la preferencia por liquidez, la curva de rendimiento puede ser negativa, plana, ascendente o con una joroba.

La distancia vertical entre la curva de rendimiento, según la teoría de las expectativas y la teoría de la preferencia por liquidez, es la prima de riesgo. En cualquier caso, la curva de rendimiento de la teoría de la preferencia por liquidez tiene mayor pendiente que la de la teoría de las expectativas. La configuración concreta depende de que la prima de liquidez sea constante o cambie con el plazo.

Mientras que la expectativa de crecimiento de las tasas de interés produce siempre una pendiente positiva de la curva de rendimiento, lo inverso no tiene que ser cierto. Si aceptamos la hipótesis de la preferencia por liquidez, la pendiente positiva de la curva de rendimiento no implica necesariamente la expectativa de tasas de interés más altas en el futuro. Si la prima de liquidez es grande y creciente con el plazo, podemos tener una curva de rendimiento ascendente incluso si el mercado espera que las tasas de interés bajen.

Si la curva de rendimiento tiene pendiente negativa (curva de rendimiento inversa) indica que el mercado espera un descenso de las tasas de interés, independientemente de si se toma en cuenta o no la prima de liquidez. Las tasas de interés pueden bajar porque baja la inflación o las tasas reales. Cuando observamos una curva de rendimiento inversa necesitamos, antes de sacar cualquier conclusión, contestar la pregunta: ¿por qué el mercado espera que bajen las tasas de interés?

Como vimos en la discusión anterior, la curva de rendimiento proporciona mucha información, pero no es fácil usarla para tomar decisiones financieras. En Estados Unidos, la Reserva Federal utiliza la curva de rendimiento como para predecir las recesiones. En una investigación reciente se descubrió[3] que, si el rendimiento a corto plazo es 2.4 puntos porcentuales por arriba del rendimiento de los bonos a 10 años, la probabilidad de una recesión cercana es de 90%.

FÓRMULAS DEL CAPÍTULO

Teoría de las expectativas	La prima de liquidez
${}_{t}f_{t+1} = E\left({}_{t}R_{t+1}\right)$	${}_{t-1}f_{t} - E\left({}_{t-1}R_{t}\right) =$ prima de liquidez
Tasa a plazo entre el periodo t y $t+1$	Tasa a plazo entre n y m días
$1 + {}_{t}f_{t+1} = \dfrac{\left(1 + {}_{0}R_{t+1}\right)^{t+1}}{\left(1 + {}_{0}R_{t}\right)^{t}}$	${}_{n}f_{m} = \left(\dfrac{1 + R_{m}\dfrac{m}{360}}{1 + R_{n}\dfrac{n}{360}} - 1\right)\dfrac{360}{m - n}$

Términos clave

Curva de rendimiento
Estructura a plazos
Indicador adelantado
Patrón de rendimientos crecientes
Prima de liquidez
Tasas a corto plazo
Tasas a plazo
Tasas spot
Teoría de la preferencia por liquidez
Teoría de las expectativas

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Se supone que conocemos las tasas de interés de los bonos a un año (las tasas a corto plazo) durante los próximos cuatro años. (La tasa de interés en año cero se refiere a la tasa de un bono a un año en el año cero.) La tasa de año 3 se refiere al periodo entre 3 y 4).

Año	Tasa de interés (%)
0	5.5
1	6.0
2	6.3
3	6.5

[3] Michael M. Phillips, "Makeup of Leading Indicators May Shift", *The Wall Street Journal*, 12 de agosto de 1996.

Calcule los precios y los rendimientos al vencimiento de los bonos cupón cero a uno, dos, tres y cuatro años. El valor nominal es de $1 000.

2. Con base en los datos de problema 1, calcule el precio y el rendimiento al vencimiento de dos bonos con cupones a cuatro años si el primer bono paga un cupón anual de $50 y el segundo bono paga el cupón anual de $100.
3. El bono a un año rinde 6.1%, mientras que el bono a dos años rinde 6.5%. ¿Cuál sería la tasa de un bono a un año dentro de un año, para que las estrategias de invertir en bonos a dos años y a uno fueran equivalentes?
4. Su horizonte de inversión es de tres años. Puede invertir en un bono cupón cero a tres años que rinde 6%, o en un bono a un año a 6.3% y después reinvertir dos veces en los bonos con el mismo plazo. ¿Qué tasa de interés en los bonos a un año, en el segundo y tercer año, hará que las dos estrategias de inversión produzcan el mismo resultado?
5.

Plazo (años)	Rendimiento al vencimiento (%)
1	8.5
2	9.2
3	9.4
5	9.1
6	8.7

a) Calcule la tasa a plazo entre el segundo y tercer año.
b) Calcule la tasa a plazo (promedio) entre el tercer y quinto año.
c) Calcule la tasa a plazo entre el quinto y sexto año.
d) Dibuje la curva de rendimiento.

6. Rendimiento de los Cetes a diferentes plazos:

Plazo (días)	Rendimiento anual (%)
28	18.5
91	19.2
182	20.4
350	19.6

a) Calcule la tasa a plazo en el periodo entre los días 28 y 91.
b) Calcule la tasa a plazo a 168 días que estará vigente dentro de 182 días.

CAPÍTULO 14

Métodos de evaluación de proyectos de inversión

Objetivos del aprendizaje

Después de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

- Entender la naturaleza de las decisiones implícitas en un proyecto de inversión.
- Clasificar los proyectos según diferentes criterios.
- Determinar el costo de capital aplicable al proyecto.
- Utilizar diferentes métodos de evaluación de proyectos.
- Entender las deficiencias de los métodos que no toman en cuenta el valor del dinero en el tiempo.
- Comparar el método de la tasa interna de retorno (*TIR*) con el método del valor presente neto.
- Detectar situaciones en las que el método *TIR* no es confiable.
- Utilizar en forma complementaria criterios múltiples de selección.
- Considerar correctamente los efectos de la inflación.
- Comparar proyectos con vidas diferentes y con desembolso inicial diferente.
- Seleccionar proyectos en condiciones de escasez de capital.
- Utilizar la calculadora financiera y la hoja de cálculo en el proceso de evaluación de proyectos.

INTRODUCCIÓN

La evaluación de proyectos es una parte del proceso de *presupuesto de capital*. Se trata de proyectos cuyos rendimientos se extienden más allá de un año. Hablamos de *inversiones en activos físicos*, en contraposición a los activos financieros. Algunos ejemplos son: terrenos, edificios, equipo, maquinaria, investigación y desarrollo, lanzamientos de nuevos productos, etcétera.

Las decisiones sobre las inversiones de capital son de gran importancia para el futuro de una empresa. Un error en el presupuesto de capital puede consistir en una inversión excesiva o insuficiente. Un exceso de capacidad productiva en relación con la demanda aumenta los costos y reduce las utilidades. Una capacidad insuficiente, en cambio, hace que se pierdan oportunidades y que la competencia aumente su participación en el mercado. Otro error consiste en una inversión que genere una mezcla de productos que no se adapten a la estructura de la demanda. Una lectura incorrecta de las tendencias del mercado nos lleva al exceso de capacidad en unas líneas e insuficiencia en otras.

Para comprender la complejidad del proceso de presupuesto de capital, pensemos en el desarrollo de un nuevo avión de pasajeros. La investigación y desarrollo pueden durar varios años y la puesta en marcha del proceso productivo dura otro tanto. Desde el surgimiento de la idea hasta la venta del primer avión puede pasar una década y para entonces la empresa habrá gastado varios miles de millones de dólares. Para alcanzar el punto de equilibrio puede ser necesario vender 500 aparatos y sólo si se logra vender más la empresa habrá realizado una utilidad.

Otro ejemplo de la complejidad del proceso de presupuesto de capital puede ser una planta nuclear cuya construcción dura 10 años y que puede costar más de 10 mil millones de dólares. Esta complejidad debe ser cuidadosamente administrada para evitar fracasos costosos y lograr operaciones rentables.

Cada proyecto de inversión es un caso aparte y no existen sencillas recetas de cocina que garanticen el éxito. El presente texto describe brevemente algunas técnicas cuantitativas que se usan en el proceso de selección de los proyectos de inversión. Para que un proyecto resulte exitoso, además de un análisis cuantitativo metodológicamente correcto, se requiere experiencia, intuición, buen juicio y buena suerte. En la figura 14.1 podemos apreciar que el conocimiento de las técnicas analíticas constituye sólo una modesta contribución al complicado proceso de tomar una decisión sobre el presupuesto de capital.

Figura 14.1

Papel de las técnicas analíticas en el proceso de tomar una decisión sobre el presupuesto de capital.

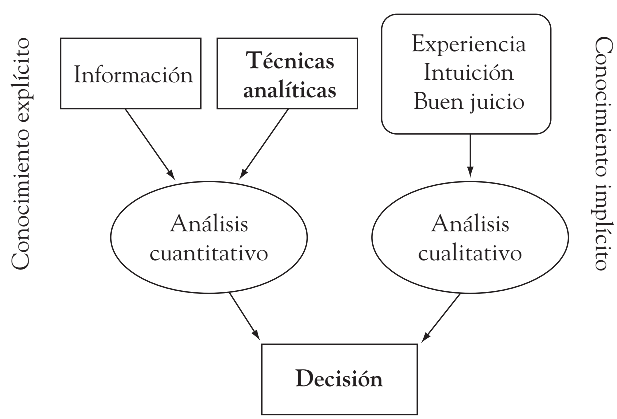
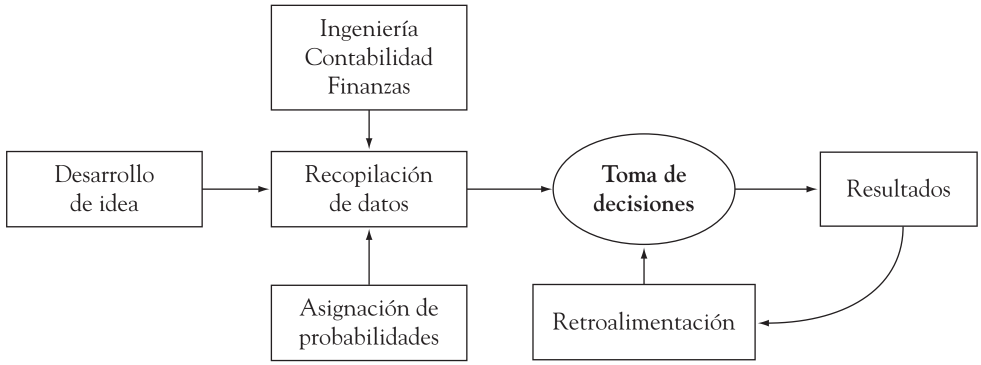


Figura 14.2

Procedimiento del presupuesto de capital.



Cualquier programa de presupuesto de capital requiere los siguientes pasos:

1. Búsqueda y descubrimiento de las oportunidades de inversión.
2. Recopilación de la información.
3. Evaluación y toma de decisión.
4. Control de ejecución y ajustes en el proyecto.

De estos cuatro pasos, el *descubrimiento de oportunidades* puede ser el más importante, aun cuando pocos consejos de validez general pueden ofrecerse en este aspecto. La recopilación de la información se refiere a los análisis de ingeniería y la investigación de los mercados. El punto cuatro también es importante, porque muchas veces el proyecto tiene que ser modificado después de su inicio con base en la nueva información disponible.

El enfoque estratégico consiste en proyectar la empresa hacia el futuro.

Toda decisión sobre el presupuesto de capital debe ser tomada dentro de un marco estratégico. El *enfoque estratégico* implica la planeación de la empresa hacia el futuro. Las decisiones deben ser subordinadas al logro de objetivos a largo plazo. Los errores en el presupuesto de capital pueden afectar en forma dramática el futuro de la empresa.

CLASIFICACIÓN DE LOS PROYECTOS

Una empresa debe elaborar procedimientos administrativos estandarizados para administrar distintas propuestas de proyectos de inversión. El nivel en que se toma la decisión depende del tamaño del proyecto: mientras más grande sea éste, más alto el nivel de los ejecutivos involucrados. Del tamaño de la empresa depende qué proyecto requiera la intervención del director general. Un millón de dólares puede ser manejado por el departamento, en empresas grandes, o por el director general, en empresas medianas.

El riesgo del proyecto depende de si la inversión es de tipo *interno* (dentro de la misma empresa) o de tipo *externo* (fusiones y adquisiciones). Las inversiones externas son más arriesgadas, pero también ofrecen más oportunidades de utilidades extraordinarias.

El objetivo de cualquier proyecto de inversión es aumentar las utilidades futuras y, así, contribuir a un mayor valor de la empresa. Este objetivo puede lograrse *reduciendo los costos* o *incrementando los ingresos*.

Para reducir los costos, aumentar la eficiencia y competitividad, la empresa reemplaza el equipo viejo por uno nuevo y más productivo. En el caso de los *proyectos de reemplazo* la información disponible es bastante confiable, por lo que los resultados pueden pronosticarse con un alto grado de certidumbre.

Para incrementar los ingresos, la empresa puede expandir las actividades existentes o crecer abarcando nuevos productos y/o mercados.

Los *proyectos de expansión* tienen la finalidad de incrementar la capacidad de las líneas de producción ya existentes. Los datos de ingeniería son confiables y la única incertidumbre se refiere a la confiabilidad de los pronósticos de ventas. La evaluación de este tipo de proyectos es más complicada que la de los proyectos de reemplazo.

Los *proyectos de crecimiento* se refieren a la instalación de líneas de producción de productos nuevos o a la conquista de nuevos mercados geográficos. Estos proyectos implican un mayor riesgo y mayor potencial de ganancias. Su elaboración es mucho más complicada que la de los proyectos de reemplazo y expansión.

En algunos casos las inversiones son obligatorias. Un ejemplo puede ser la instalación de un equipo anticontaminante decretado por la ley. En este caso, el único problema es lograr el objetivo con un costo mínimo.

Algunos proyectos tienen efectos intangibles o imposibles de medir en forma directa, por ejemplo, los gastos cuyo objetivo es mejorar el ánimo de los empleados: un equipo de sonido, un nuevo comedor, un sistema de iluminación. Aun cuando los flujos de efectivo generados por este tipo de proyectos son imposibles de medir en forma directa, los beneficios pueden ser muy importantes y se reflejarán en indicadores como la productividad, el ausentismo, la salud de los trabajadores, etcétera.

Al tomar en cuenta el *grado de dependencia* de diferentes propuestas de inversión, los proyectos pueden ser *independientes* o *mutuamente excluyentes*. Los proyectos independientes no están interrelacionados. Un ejemplo puede ser la adquisición de un camión, como proyecto *A*, e instalación de una nueva máquina, como proyecto *B*. En contraste, los proyectos mutuamente excluyentes proponen lograr el mismo objetivo con diferentes métodos: el proyecto A consiste en adquirir un camión de 10 toneladas, mientras que el proyecto *B* consiste en comprar dos camionetas de cinco toneladas cada una.

Los proyectos pueden ser *complementarios*. Un ejemplo puede ser la adquisición de un nuevo equipo de cómputo (proyecto *A*) y el desarrollo de una nueva base de datos de la empresa (proyecto *B*). También pueden ser *sustitutos*. La introducción de un nuevo cereal puede afectar las ventas de los cereales que ya están en el mercado.

Generalmente se supone que, en cada empresa, existe una gran cantidad de propuestas de proyectos de inversión que rebasan sus posibilidades de administración y financiamiento. La evaluación de proyectos consiste en seleccionar los aceptables y rechazar los inaceptables. Si el número de proyectos buenos (aceptables) rebasa la capacidad de la empresa, es necesario seleccionar los mejores.

Para resolver este doble problema es necesario *jerarquizar* los proyectos en orden descendente, desde el punto de vista de su contribución al valor de la empresa, y establecer un límite inferior. Todos los proyectos por arriba de este límite serán aceptados y los proyectos por debajo serán rechazados.

El rango que se asigna a cada proyecto depende de su contribución al valor de la empresa.

Los métodos de jerarquización o asignación de rangos (*ranking* en inglés) constituyen el tema principal de esta parte del libro.

El horizonte de planeación de los programas de presupuesto de capital depende de la naturaleza de la industria y las características del mercado en que opera. En los casos mencionados de la industria de aviones de pasajeros o generación de electricidad en las plantas nucleares, el horizonte de planeación puede rebasar los 20 años. En contraste, en algunos segmentos de la industria de computación (o en la industria de ropa de diseñador) el horizonte de planeación es apenas de un año. En el primer caso, las ventas (demanda) pueden pronosticarse con un alto grado de confiabilidad en periodos prolongados y el proceso de investigación e instalación del equipo tarda mucho tiempo. En el segundo caso, el mercado es muy volátil y el cambio de las líneas de producción puede lograrse con relativa rapidez.

EL COSTO DE CAPITAL

La mayor parte de los métodos de evaluación de proyectos de inversión se basan en los flujos de efectivo descontados. Los resultados de estas evaluaciones son muy sensibles a la tasa de descuento. Antes de exponer los métodos de evaluación, presentamos un breve resumen de los criterios de determinación de la tasa de descuento apropiada para cada proyecto.

Los flujos de efectivo que genera el proyecto deben ser descontados con una tasa que representa el costo de oportunidad de capital de la empresa, k. Esta tasa puede llamarse rendimiento requerido o rendimiento atractivo mínimo.[1]

Un proyecto genera valor si produce un rendimiento mayor que el rendimiento de un portafolio de activos financieros de riesgo equivalente.

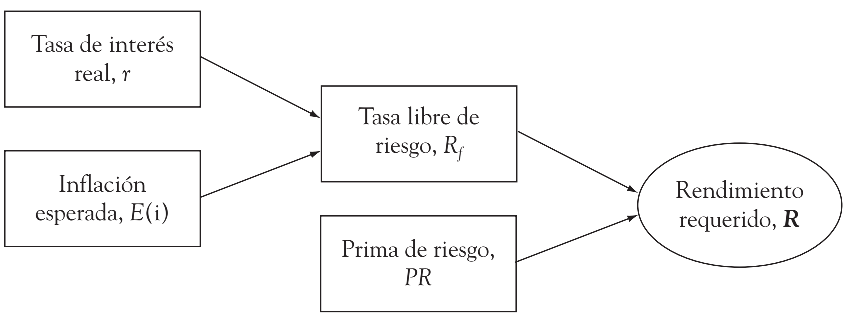
El costo de capital de un proyecto es el rendimiento de un portafolio de activos financieros de riesgo equivalente. Así, los mercados financieros proporcionan un criterio para determinar si un proyecto específico genera valor o no.

En términos generales, el rendimiento requerido de cualquier proyecto consta de tres elementos:

1. La tasa de interés libre de riesgo real (r), que es el precio del dinero determinado por el mercado y la política monetaria del banco central. Es un parámetro macroeconómico que cambia constantemente.
2. La inflación esperada, $E(i)$, que es la pérdida del poder adquisitivo del dinero esperada durante el año.
3. La prima de riesgo que depende del país, la industria, la empresa y el proyecto específico.

Figura 14.3

Elementos del rendimiento requerido en términos nominales.



[1] El rendimiento atractivo mínimo es mejor conocido por sus siglas en inglés: MARR (*minimum attractive rate of return*).

Los primeros dos elementos se juntan para formar la tasa libre de riesgo (R_F). Es un parámetro del mercado financiero que refleja el rendimiento de la deuda del gobierno a corto plazo: Cetes a 28 días en México, *T-Bills* en Estados Unidos.

El esquema de la figura 14.3 facilita la visualización de los tres elementos mencionados.

De aquí en adelante, el rendimiento requerido para una clase particular de proyectos, R (el punto de vista del acreedor), y el costo de oportunidad del capital de la empresa, k (el punto de vista del deudor), serán tratados como sinónimos.

El costo de la deuda es la tasa de interés que la empresa paga al banco, o el rendimiento de los bonos emitidos por la empresa. Si hay varios tipos de deuda (papel comercial, créditos hipotecarios, bonos a largo plazo en diferentes monedas, etc.), el costo de la deuda es la media ponderada de sus diferentes formas.

Resulta un poco más complicado determinar el costo del capital contable de la empresa. En el capítulo 8 vimos el modelo de valuación de acciones basado en el dividendo descontado que crece a un ritmo constante, g. Según este modelo, el costo de capital contable es:

$$k_S = \frac{D_1}{P_0} + g$$

donde k_S es el costo de capital contable o la tasa de capitalización de mercado.

D_1 es el valor esperado del dividendo al final del primer periodo.

P_0 es el precio de mercado de la acción.

g es la tasa de crecimiento esperada del dividendo.

Para utilizar esta fórmula es necesario hacer una proyección del dividendo al final del año y de su tasa de crecimiento. El precio de la acción lo proporciona el mercado. Si se espera que este año la empresa pague un dividendo de \$6.5 y que dicho dividendo crezca en el futuro previsible a un ritmo de 5% anual, y si la acción de la empresa se vende a \$57, el costo de capital contable es:

$$k_S = \frac{6.5}{57} + 0.05 = 16.4\%$$

Otro modelo de valuación muy popular en la determinación del costo del capital contable es el *modelo de valuación de activos de capital*, mejor conocido por sus siglas en inglés como *CAPM*. Según este modelo, el rendimiento requerido para el capital contable de una empresa se calcula de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$R_i = R_F + \beta_i(R_M - R_F)$$

donde R_i es el rendimiento requerido para la empresa (i).

R_F es la tasa libre de riesgo.

β_i es el coeficiente que mide el riesgo de la empresa, comparado con el riesgo del mercado en general. $\beta_i > 1$ indica que la empresa i es más riesgosa que el mercado.

R_M	es la tasa de rendimiento del mercado, medida por el rendimiento de algún índice bursátil de amplia base.
$(R_M - R_F)$	es la prima de riesgo del mercado, el exceso del rendimiento del mercado sobre la tasa libre de riesgo.
$\beta_i(R_M - R_F)$	es la prima de riesgo de la empresa *i*.

Supongamos que la tasa libre de riesgo es de 6%, el rendimiento promedio del índice bursátil es de 14% y la beta de la empresa X calculada con base en datos históricos por alguna empresa consultora de prestigio es de 1.4. El costo del capital contable, calculado con el modelo *CAPM* es de:

$$R_X = 0.06 + 1.4 \cdot (0.14 - 0.06) = 0.172 = 17.2\%$$

Dado que la empresa X representa un mayor riesgo que el mercado en general, el rendimiento mínimo aceptable en esta empresa debe ser mayor que el rendimiento promedio del mercado.

El modelo *CAPM* es controvertido, pero su uso es bastante generalizado.

Si el proyecto es financiado de forma parcial, en parte por la emisión de deuda y en parte por la emisión de acciones, el costo de oportunidad del capital apropiado es el *WACC* (*weighted average cost of capital*) que se interpreta como *costo de capital promedio ponderado*.

Dado que los intereses sobre la deuda son deducibles para los propósitos fiscales y los pagos para los tenedores de acciones no lo son, el *CCPP* después de los impuestos se calcula según la siguiente fórmula:

$$CCPP = k_b(1-T)\frac{B}{B+S} + k_s\frac{S}{B+S}$$

donde	k_b	es el costo promedio de la deuda.
	k_s	es el costo del capital contable (rendimiento de acciones).
	T	es la tasa impositiva corporativa.
	B	es la deuda.
	S	son las acciones en manos del público (el capital contable).
	$B/(B+S)$	es el valor de mercado de la deuda fijado como proporción deseada del valor de la empresa.
	$S/(B+S)$	es el valor de mercado del capital contable fijado como proporción deseada del valor de mercado de la empresa.

El *CCPP* representa el costo de oportunidad de capital de la empresa y, como tal, puede ser utilizado para descontar los flujos de efectivo para propósitos de presupuesto de capital.

Reflexión sobre matemáticas financieras

Problemas con el *CCPP*

En la práctica, el cálculo correcto del costo promedio de capital no es tan sencillo. Éste se basa en el supuesto de que la estructura de capital de la empresa se mantendrá constante durante la vida del proyecto. En realidad la estructura de capital cambia constantemente. Esto modifica los coeficientes de ponderación de nuestra ecuación y también los costos de diferentes tipos de capital. Por ejemplo, en la medida en que la empresa se endeuda más, el precio de sus acciones baja, lo que aumenta el rendimiento de las acciones (k_s) y cambia el valor del *CCPP*. Varios detractores del *CCPP* sugieren que el descuento de todos los flujos de efectivo generados por el proyecto no debe hacerse con la misma tasa. Deben calcularse varios *CCPP* para diferentes periodos.

Los defensores del *CCPP* responden que la estructura de capital utilizada en el cálculo es la *estructura objetivo* y los ejecutivos financieros deben esforzarse por no alejarse de ella. Además, la fórmula para el cálculo del *CCPP* puede ser extendida para tomar en cuenta las peculiaridades de la empresa: varios tipos de deuda, costos de emisión, subsidios, coberturas, estructura fiscal complicada, etcétera.

La fórmula del *CCPP* presentada con anterioridad sólo puede ser utilizada en empresas con una estructura de capital sencilla y estática.

El costo de capital de la empresa, k, es el rendimiento mínimo aceptable para los proyectos típicos y representativos. Los administradores de la empresa pueden modificar el costo de capital para proyectos específicos. A continuación indicamos algunos casos en los que puede ser necesario subir el k por arriba del costo de capital calculado.

- El riesgo del proyecto es mayor que el riesgo de la empresa.
- El proyecto implica una incursión en nuevos mercados o productos. La dirección puede subir k para desalentar decisiones precipitadas.
- El capital disponible para los proyectos es limitado.
- Previsión de una competencia más reñida.

El lector debe proporcionar algunos ejemplos de cuándo se justifica bajar el rendimiento mínimo aceptable con relación al costo de capital calculado.

La evaluación de proyectos es muy sensible a la tasa de descuento y su determinación es un asunto bastante delicado. Sin embargo, una discusión más amplia de este tema rebasa el ámbito del presente texto. La decisión final la toma la dirección de la empresa. En esta decisión, además de los factores cuantitativos, deben tomarse en cuenta los factores no cuantificables, la experiencia e intuición. Es inevitable cierto grado de arbitrariedad.

MÉTODOS DE EVALUACIÓN DE PROYECTOS

El objetivo fundamental de la selección de los proyectos de inversión es *maximizar el valor de la empresa*. Para lograr este objetivo es necesario:

a) de los proyectos mutuamente excluyentes, seleccionar aquellos que hacen una contribución positiva al valor de la empresa (proyectos aceptables), y

b) de los proyectos aceptables, seleccionar sólo aquellos que maximicen el valor de la empresa y no rebasen su capacidad administrativa y de financiamiento.

En la práctica se utilizan diez criterios (métodos) de selección de proyectos de inversión:

1. Periodo de recuperación del efectivo (*PR*).
2. Periodo de recuperación del efectivo descontado (*PRD*).
3. Tasa contable de rendimiento (*TCR*).
4. Valor presente neto (*VPN*).
5. Tasa interna de retorno (*TIR*).
6. Valor terminal neto (*VTN*).
7. Rendimiento del costo de oportunidad (*RCO*).
8. Tasa interna de retorno modificada (*TIRM*).
9. Índice de rentabilidad (*IR*).
10. Tasa de rendimiento a perpetuidad (*TRP*).

Antes de describir cómo se aplican los diferentes criterios de evaluación de proyectos, mencionaremos los requisitos que debe cumplir cualquier criterio de evaluación metodológicamente correcto.

Para que los proyectos de inversión contribuyan a la maximización del valor de la empresa, los criterios de su selección deben respetar las siguientes reglas:

1. Considerar en forma adecuada *todos* los flujos de efectivo generados.
2. Descontar los flujos de efectivo con una tasa que representa el *costo de oportunidad del capital* para la empresa (la tasa de mercado ajustada por el riesgo).
3. De los proyectos mutuamente excluyentes, seleccionar aquellos que *maximicen el patrimonio* de los accionistas de la empresa.
4. Permitir la consideración de cada proyecto por separado, con base en sus propios méritos. Esta regla se llama principio de aditividad del valor.

El *principio de aditividad del valor* significa que, cuando se conoce el valor de varios proyectos por separado, el incremento del valor de la empresa es simplemente la suma de los valores individuales de los proyectos aprobados. Por ejemplo, si se aceptan tres proyectos cuyos valores son V_1, V_2 y V_3, el incremento del valor de la empresa es:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \sum_{i=1}^{3} V_i$$

donde V es el valor de la empresa y V_i es el valor del proyecto i.

Otra interpretación del principio de aditividad implica que si el proyecto A es mejor que el proyecto *B* y el proyecto *B* es mejor que el proyecto C, entonces el proyecto conjunto A + *B* es mejor que *B* + C. Formalmente, tenemos:

$$A \succ B \quad \text{y} \quad B \succ C \qquad\qquad A + B \succ B + C \quad \text{y} \quad A \succ C$$

donde el operador $\succ$ significa "mejor que" (un equivalente cualitativo de $>$).

Datos para la evaluación

Para presentar los métodos de evaluación utilizaremos el mismo conjunto de datos. Supongamos que la empresa contempla cuatro proyectos mutuamente excluyentes con el mismo desembolso inicial de $1 000 y la misma vida de cuatro años.[2] Además, se supone que los proyectos no pueden ser abandonados antes de tiempo sin incurrir en los flujos indicados. El flujo negativo en el último año del proyecto A significa que hay que desmantelar el proyecto e incurrir en costos de "limpieza". Se supone que los cuatro proyectos representan el mismo riesgo y el costo de oportunidad de capital para la empresa es de 10%. Los flujos de efectivo son netos. Si hay algún flujo de salida en un año particular, éste se resta del flujo de entrada.

Cuadro 14.1

Flujos netos de efectivo de cuatro proyectos mutuamente excluyentes.

Año	A	B	C	D
0	−1 000	−1 000	−1 000	−1 000
1	200	100	350	600
2	800	200	350	400
3	300	700	350	300
4	−300	700	350	200

Periodo de recuperación (*PR*)

El *periodo de recuperación* (*payback period*), también llamado *periodo de reembolso*, es el número de años que se requieren para recuperar el desembolso inicial de capital. Para el proyecto A, el $PR_A = 2$ (200 + 800 = 1 000), para el proyecto *B*, $PR_B = 3$, $PR_C = 3$, $PR_D = 2$.

El método *PR* viola todos los principios metodológicos antes señalados.

1. No considera todos los flujos de efectivo, ignorando los flujos que se presentan después de la recuperación del desembolso inicial.
2. Ignora la secuencia de pagos dentro del periodo de recuperación. La secuencia 900, 100 es diferente que la secuencia 100, 900, aun cuando en los dos casos el periodo de recuperación fuera dos.

[2] Posteriormente analizaremos las complicaciones que se derivan de la comparación de proyectos de diferentes tamaños y distintas vidas.

3. No descuenta los flujos con la tasa que representa el costo de capital.
4. No maximiza el valor de la empresa.
5. Viola el principio de aditividad.

El proyecto *A*, por ejemplo, tiene un *PR* corto pero tiene un flujo de efectivo negativo en el último año de vida del proyecto, el cual es totalmente ignorado por el método.

Los proyectos *A* y *D* tienen el mismo *PR* = 2 años, pero en el proyecto *A* los flujos se concentran en el segundo año, mientras en el proyecto *D* lo hacen en el primer año. Podemos ver claramente que el método *PR* no toma en cuenta el valor del dinero en el tiempo.

El hecho de que el criterio *PR* no tome en cuenta los flujos negativos después del periodo de recuperación significa que dicho método no maximiza el valor de la empresa. También es fácil de demostrar que el *PR* no cumple con el requisito de aditividad.

La popularidad del criterio del periodo de recuperación se debe a que es fácil de usar y enfatiza la necesidad de liquidez. Es pertinente para las empresas que resienten la escasez de liquidez o las industrias donde las tecnologías cambian con gran rapidez. Para ser considerado, un proyecto tiene que recuperar su costo rápidamente. Cuando el horizonte de planificación es muy corto, este método produce resultados satisfactorios. Sin embargo, cuando el horizonte de planeación se prolonga es necesario recurrir a métodos más sofisticados.

Usos justificados:

1. Proyectos pequeños en empresas grandes. La ventaja en este caso es la facilidad de cálculo y rapidez.
2. Pequeñas empresas privadas sin acceso al mercado de capitales.

Periodo de recuperación del efectivo descontado (*PRD*)

Este método consiste en calcular el número de años que se requieren para que la suma de los flujos de efectivo generados por el proyecto, descontados por el costo de oportunidad del capital, se iguale al desembolso inicial en el proyecto. Para ilustrar este método utilizaremos los datos del proyecto *C*. La columna del factor de valor presente a 10% representa el factor de descuento $\frac{1}{(1+R)^t} = \frac{1}{1.1^t}$.

Año	Flujo de efectivo C	Factor de descuento a 10%	Valor presente	Valor presente acumulativo
0	−1 000	1	−1 000.00	−1 000.00
1	350	0.9091	318.18	−681.82
2	350	0.8264	289.25	−392.56
3	350	0.7513	262.96	−129.60
4	350	0.6830	239.05	109.45

Los flujos de efectivo descontados rebasan el desembolso inicial entre el tercero y cuarto años. El método de periodo de recuperación del efectivo descontado es mucho mejor que el *PR*, ya que considera el valor del dinero en el tiempo. Al emplear este método encontraremos que el proyecto *D* es mejor que el proyecto A, aunque sus periodos de recuperación son iguales.

Sin embargo, el método de periodo de recuperación del efectivo descontado no toma en cuenta todos los flujos de efectivo que genera el proyecto y adolece de los otros defectos del método del periodo de recuperación. En la práctica, este método se utiliza raras veces.

Tasa contable de rendimiento (*TCR*)

La *tasa contable de rendimiento* (*average accounting rate*) es la razón entre el *flujo de efectivo promedio* y el costo del proyecto.[3] El flujo promedio se calcula dividiendo la suma de todos los flujos entre la vida del proyecto. En algunos textos la *TCR* se llama *rendimiento sobre los activos* o tasa media de rendimiento. Su fórmula es la siguiente:

$$TCR = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} FE_t}{I_0} = \frac{\text{Flujo de efectivo promedio}}{\text{Desembolso inicial}}$$

donde FE_t es el flujo de efectivo neto en el periodo *t*.

I_0 es el costo del proyecto.

n es la vida del proyecto en años.

Al utilizar esta fórmula para calcular la *TCR* del proyecto *A*, tenemos:

$$TCR_A = \frac{\frac{200 + 800 + 300 - 300}{4}}{1\,000} = \frac{250}{1\,000} = 0.25 = 25\%$$

Es fácil comprobar que: $TCR_B = 42.5\%$, $TCR_C = 35\%$, $TCR_D = 37.5\%$.

La principal desventaja del método consiste en que éste no toma en cuenta el valor del dinero en el tiempo. El proyecto *B* parece mejor que el proyecto *D*, aun cuando sus flujos de efectivo se concentran en los dos últimos años de vida, mientras que en el *D* los mayores flujos se dan en los dos primeros años. Si en el proyecto *D* invirtiéramos el orden en que se producen los flujos, obtendríamos la *TCR* exactamente igual. Esto tendría sentido si el costo de oportunidad de capital fuese cero. En el mundo real, donde el capital tiene un costo positivo, la tasa contable de rendimiento debería ser descartada como método de asignación de rangos a los proyectos de inversión.

[3] Una definición más general del rendimiento contable es: utilidad promedio dividida entre el valor en libros promedio de la inversión.

Existen múltiples variantes de la tasa contable de rendimiento y su uso es bastante generalizado, a pesar de evidentes deficiencias. Esto se debe a las siguientes ventajas del método:

- La *TCR* es fácil de calcular, sin preocuparse por el valor del dinero en el tiempo. Los datos necesarios se encuentran en el sistema contable de la empresa.
- Es consistente con los sistemas de remuneración de ejecutivos basados en medidas contables de rendimiento sobre la inversión.
- Refleja la importancia de medidas contables para los directivos en su relación con los accionistas.

Valor presente neto (*VPN*)

El *valor presente neto* es el mejor método de evaluación de proyectos. No tiene ninguna de las desventajas de los otros métodos y cumple con todos los requisitos metodológicos señalados con anterioridad. El *VPN* pertenece a la familia de *técnicas de flujo de efectivo descontado* que reconocen el valor del dinero en el tiempo.

Este método es la suma del valor presente de los flujos de efectivo que produce el proyecto, descontados por la tasa que representa el costo de oportunidad del capital de la empresa, menos el costo inicial del proyecto (desembolso inicial).

El valor presente de un flujo de efectivo que se produce en el periodo t es el valor de este flujo descontado t veces con la tasa de interés, k, que representa el costo de oportunidad del capital. En símbolos tenemos:

$$VP(FE_t) = \frac{FE_t}{(1+k)^t}$$

La suma de los valores presentes de todos los flujos generados por un proyecto durante su vida, n, se conoce como valor presente bruto (*VPB*) y se escribe como:

$$VPB = \frac{FE_1}{(1+k)^1} + \frac{FE_2}{(1+k)^2} + \cdots + \frac{FE_n}{(1+k)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{FE_t}{(1+k)^t}$$

El *valor presente neto* es el valor presente bruto menos el costo de la inversión, I_0

$$VPN = VPB - I_0 = \left[\frac{FE_1}{(1+k)^1} + \frac{FE_2}{(1+k)^2} + \cdots + \frac{FE_n}{(1+k)^n}\right] - I_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{FE_t}{(1=k)^t} - I_0$$

o, en forma abreviada:

$$\boxed{VPN = -I_0 + VPB = -I_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{FE_t}{(1+k)^t}}$$

Si el *VPN* es positivo, el proyecto puede ser aceptado; si es negativo, debe ser rechazado. De dos proyectos mutuamente excluyentes con la misma vida, hay que elegir el que tiene el mayor *VPN*. La regla de decisión puede ser expresada como:

$$\text{si el } VPN > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{aceptar}$$

$$\text{si el } VPN < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rechazar}$$

Para proyectos mutuamente excluyentes con el *VPN* positivo y con la misma vida:

$$VPN(A) > VPN(B) \Rightarrow \mathrm{A} \succ B \qquad (A \text{ es preferible a } B)$$

La fórmula del valor presente se basa en el supuesto de que los flujos de efectivo son netos y de que se reciben (o pagan) al final de cada periodo. I_0 es el desembolso inicial. Si el proyecto requiere desembolsos adicionales en periodos posteriores, éstos se restan de los flujos de efectivo del periodo correspondiente y entran con el signo negativo (en caso de que rebasen estos flujos).

Como ilustración del método *VPN* calculemos el *VPN* para el proyecto *B*.

$$VPB(\mathrm{B}) = \frac{100}{1.1^1} + \frac{200}{1.1^2} + \frac{700}{1.1^3} + \frac{700}{1.1^4} = 90.9 + 165.3 + 525.9 + 478.1 = 1260.23$$

$$VPN(B) = VPB(B) - I_0 = 1\,260.23 - 1\,000 = 260.23$$

Dado que $VPN(B) > 0$, el proyecto *B* puede ser aceptado.

En la siguiente tabla presentamos el *VPN* para los cuatro proyectos:

Proyecto	A	B	C	*D*
VPN	−136.53	260.23	109.45	238.03

Si el costo de oportunidad del capital de la empresa es realmente 10%, el mejor proyecto es el proyecto *B*. El *VPN* es exactamente igual al incremento del valor de la empresa. Si el *VPN* es igual a cero, el proyecto genera los flujos de efectivo suficientes para cubrir todos los costos, incluyendo los financieros. Los acreedores recibirán el principal más los intereses y los accionistas recibirán los rendimientos esperados.

El valor presente neto de un proyecto es igual al incremento del patrimonio de los accionistas.

Un proyecto con el valor presente neto igual a cero gana un rendimiento justo para compensar a los acreedores y a los accionistas de tal manera que cada uno recibe los rendimientos esperados a cambio del riesgo que corre. Un proyecto con el *VPN* positivo gana más que el rendimiento requerido, por lo que aumenta el patrimonio de los accionistas.

Todo lo anterior indica que el *VPN* es la regla de decisión correcta para propósitos de presupuesto de capital. Dicha regla cumple con todos los requisitos metodológicos:

- Toma en cuenta todos los flujos de efectivo.
- Descuenta dichos flujos con el costo de oportunidad del capital aplicable al proyecto.
- Maximiza el valor de la empresa.
- Obedece al principio de aditividad del valor.

El valor presente neto de un conjunto de proyectos de inversión es la suma de los valores presentes netos de los proyectos individuales.

$$VPN_{A+B} = VPN_A = VPN_B$$

Esta propiedad del método del *VPN* se llama *aditividad del valor*. La aditividad permite separar un proyecto grande en una serie de proyectos más pequeños, calcular el *VPN* de cada uno y después sumar estos valores para obtener el *VPN* total. Los flujos de efectivo de cada subproyecto pueden ser descontados con tasas de descuento diferentes que reflejen el riesgo de cada operación.

Para ver cómo el valor presente neto es sensible a los cambios en la tasa de descuento calculamos el *VPN* de los cuatro proyectos para tasas de 12 y 15%.

Proyecto	A	B	C	D
VPN (10%)	−136.53	260.23	109.45	238.03
VPN (12%)	−160.79	191.83	63.07	195.23
VPN (15%)	−195.44	98.67	−0.76	135.80

Si observamos los resultados de los cálculos podemos constatar lo siguiente:

- El valor presente neto se reduce en la medida en que aumenta la tasa de descuento.
- Los proyectos cuyos flujos de efectivo se concentran en los últimos años de su vida son más sensibles a los incrementos de la tasa de descuento (proyecto *B*).

Con la tasa de 10% el proyecto *B* es mejor que el proyecto *D*. Para las tasas de 12% y mayores el proyecto *D* es mejor, ya que sus mayores flujos de efectivo se dan en los primeros dos años.

Tasa interna de retorno (*TIR*)

A pesar de que el método del valor presente neto es el mejor para asignar rangos a los proyectos, el método que se utiliza con mayor frecuencia para este propósito es la tasa interna de retorno (*TIR*), conocida también como tasa interna de rendimiento. La tasa es *interna* porque no depende de las condiciones en el mercado de capitales. Es la tasa *intrínseca* del proyecto.

La tasa interna de retorno es la tasa de descuento que iguala el valor presente de los flujos de efectivo esperados en el futuro con el desembolso inicial (el costo del proyecto). En otras palabras, la *TIR* es la tasa de descuento que hace que el valor presente neto se iguale a cero.

$$\text{Si } k = TIR \qquad \Rightarrow \qquad VPN = 0$$

La *TIR* se calcula al emplear la fórmula del *VPN*.

$$\left[\frac{FE_1}{(1+TIR)^1} + \frac{FE_2}{(1+TIR)^2} + \cdots + \frac{FE_n}{(1+TIR)^n}\right] - I_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{FE_t}{(1+TIR)^t} - I_0 = 0$$

En esta fórmula conocemos los flujos de efectivo, el desembolso inicial y la vida del proyecto. Lo que hay que calcular es la tasa de descuento, la *TIR*. Resulta obvio que no es posible despejar la *TIR*. Lo único que nos queda es el *método de prueba y error* que consiste en los siguientes pasos:

1. Tomar algún valor arbitrario de la tasa de descuento y calcular el *VPN*.
2. Si el *VNP* resulta negativo, reducir la tasa de descuento y volver a calcular el *VPN*. Si el *VPN* es positivo, aumentar la tasa de descuento y repetir el procedimiento.
3. Si para un valor de la tasa de descuento el *VPN* es positivo y para otro es negativo, la *TIR* está entre estos dos valores.
4. Cuando el rango de las tasas de descuento que contiene la *TIR* es bastante estrecho, usar el método de interpolación para obtener una aproximación aceptable a la *TIR* verdadera.

En la práctica se usa algún programa de computadora o una calculadora financiera. A continuación presentamos la *TIR* de cada uno de los cuatro proyectos, junto con su valor presente neto.

Proyecto	**A**	**B**	**C**	**D**
VPN (10%)	−136.53	260.23	109.45	238.03
TIR (%)	0	18.59	14.96	23.05

Para los proyectos independientes utilizamos la siguiente regla de decisión: si la *TIR* es mayor que el costo del capital, aceptar el proyecto. De dos proyectos mutuamente excluyentes, aceptar aquel que tiene la *TIR* más alta.

Si $\quad TIR > k \Rightarrow$ aceptar, si $TIR < k \Rightarrow$ rechazar

$\quad TIR(\text{A}) > TIR(B) > k \Rightarrow \text{A} \succ B$ (A es preferible a B)

Como podemos observar en el cuadro anterior, cuando la tasa de descuento es de 10%, el criterio del *VPN* no coincide con el criterio de la *TIR*. Según el primer criterio deberíamos escoger el proyecto *B*, y según el segundo criterio, el proyecto *D*. Como lo demostraremos en seguida, el único criterio metodológicamente correcto, consistente con la maximización del valor de la empresa, es el valor presente neto.

Comparación de los métodos *VPN* y *TIR*

Tanto el *VPN* como la *TIR* representan técnicas de flujo de efectivo descontado. La fórmula matemática de los dos métodos parece idéntica. Sin embargo, el hecho de que cada uno de estos métodos pueda favorecer un proyecto distinto significa que no son totalmente equivalentes. Concretamente, el método de la *TIR* contiene ciertos elementos que pueden conducir a decisiones erróneas.

Antes de discutir los errores metodológicos de la *TIR* veamos los perfiles del valor presente neto. El perfil del *VPN* es la función que muestra cómo el *VPN* depende de la tasa de descuento. Primero presentaremos este perfil para el proyecto *B* (véase figura 14.4).

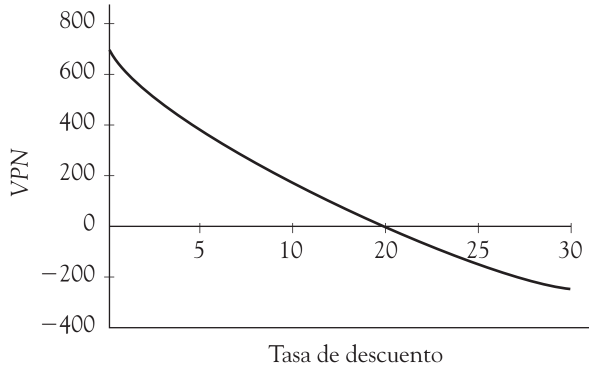


Figura 14.4

VPN del proyecto *B* a diferentes tasas de descuento.

En la gráfica sobresalen tres puntos:

1. La intersección vertical que representa el *VPN* cuando el costo de oportunidad del capital es igual a cero. Este valor es fácil de calcular. Simplemente sumamos todos los flujos de efectivo generados por el proyecto y le restamos el costo del mismo. En nuestro caso, este valor es igual a 700(1 700 − 1 000).
2. El *VPN* con la tasa de descuento es igual al costo de oportunidad del capital. En el caso del proyecto *B* este valor es igual a 260.
3. La intersección horizontal. Cuando el proyecto se descuenta con la *TIR*, su *VPN* es igual a cero.

Cuando la tasa de descuento es menor que la *TIR*, el *VPN* es positivo. En este rango de las tasas de descuento el proyecto es aceptable. Cuando los flujos de efectivo del proyecto se descuentan con una tasa mayor que la *TIR*, el *VPN* es negativo y el proyecto deja de ser aceptable.

En el caso típico, el proyecto que tiene el *VPN* mayor también tiene la *TIR* más grande. En este caso, el perfil del *VPN* del proyecto superior está por arriba del perfil del proyecto inferior. Tal es el caso del proyecto *B* comparado con el *C*, como puede apreciarse en la figura 14.5.

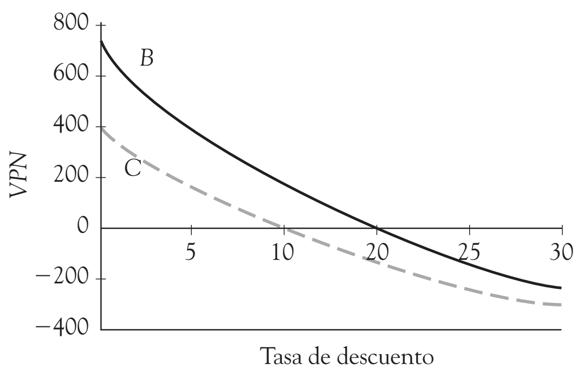
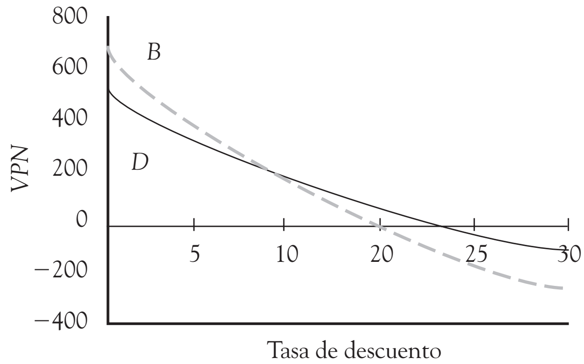


Figura 14.5

Perfiles del *VPN* de los proyectos *B* y *C*.

Figura 14.6

Perfiles del *VPN* de los proyectos *B* y *D*.



Cuando los criterios del *VPN* y de la *TIR* no coinciden, tenemos un patrón de perfiles del *VPN* cruzados, como es el caso de los proyectos *B* y *D* (véase figura 14.6).

Si el valor presente neto de un proyecto es positivo, su tasa interna de retorno es mayor que el costo de capital.

Para las tasas de descuento menores que 11% el proyecto *B* es mejor, porque tiene el *VPN* más alto. En cambio, para las tasas de descuento superiores a 11% el proyecto *D* es mejor, porque tiene el *VPN* más alto y, además, tiene la *TIR* más alta. En otras palabras, para las tasas de interés mayores que 11%, los criterios del *VPN* y de la *TIR* coinciden favoreciendo al proyecto *D*, que tiene una recuperación de capital más rápida que el proyecto *B*.

Esta afirmación parece sugerir que los dos métodos proporcionan el mismo criterio de selección. Sin embargo, esto no es cierto. Un ejemplo es un proyecto en el cual el desembolso se presenta en el último año de vida. En este caso la *TIR* puede ser mayor que el costo de capital y el *VPN* puede ser negativo.

Cuadro 14.2

Flujos de efectivo del proyecto *E*.

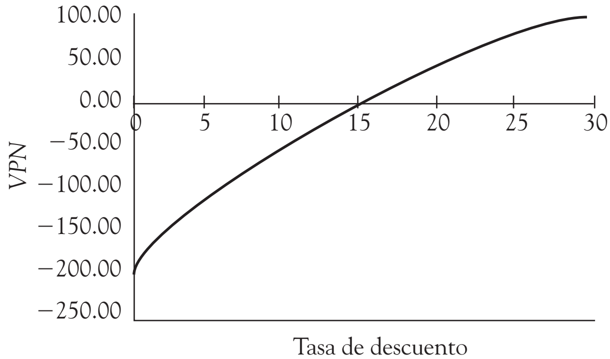
Año	Flujo de efectivo
1	200
2	200
3	200
4	−800

Un proyecto como *E* se llama *proyecto de financiamiento*. Primero se reciben los flujos de efectivo y en el cuarto año es necesario pagar la deuda (fig. 14.7).

Como es fácil de comprobar, con la tasa de descuento de 10%, el *VPN* es igual a −49, mientras que la *TIR* es igual a 15.09% $> k = 10\%$. De acuerdo con el criterio de la *TIR* el proyecto debe ser aceptado. Sin embargo, su valor presente neto es negativo, por lo que el proyecto debe ser rechazado. La gráfica del perfil del valor presente neto explica lo que sucede en este caso.

Figura 14.7

Perfil del *VPN* inverso (proyecto *E*).



El patrón de flujos de efectivo presentado en el ejemplo anterior tal vez no sea típico, sin embargo señala una de las muchas deficiencias del método de la TIR. Si nos limitáramos sólo a este método aceptaríamos el proyecto *E*, lo cual sería un error.

Con el método de la *TIR*, los flujos de efectivo de cada proyecto se descuentan con una tasa diferente, que es la misma *TIR*.

Debilidades del método de la TIR

1. Un supuesto inadecuado acerca de la tasa de rendimiento a la cual se pueden reinvertir los flujos provenientes del proyecto.[4]

Suponemos que en el método de la *TIR*, los flujos del proyecto pueden ser reinvertidos en otros proyectos que ofrezcan un rendimiento igual a la *TIR*. Esto viola el segundo principio metodológico según el cual todos los flujos deberían descontarse con la misma tasa, *k*, que representa el costo de oportunidad de capital de la empresa. Cuando la *TIR* de un proyecto es alta, el supuesto de reinversión es poco realista. Un proyecto puede producir, por ejemplo, un rendimiento de 20%, pero será único e irrepetible. Cuando obtengamos ingresos de este proyecto, nada garantizará que después aparezcan otros con el mismo rendimiento. Por el contrario, la mejor inversión disponible puede no rendir más que el costo de oportunidad de capital de la empresa. Éste, precisamente, es el supuesto realista que adopta la técnica del *VPN*.

Si la *TIR* es alta, se favorece a los proyectos cuyos flujos de efectivo se concentran en periodos iniciales. En el proyecto *E*, por ejemplo, el valor presente del desembolso del cuarto año es pequeño, si es descontado con la *TIR* de 15%.

En nuestro ejemplo, en el proyecto *A* los flujos de efectivo se descuentan con una tasa igual a cero, en el proyecto *B* con 18.56%, en el proyecto C con 14.96% y en el proyecto *D* con 23.05%. Sin embargo, hablamos de la misma empresa y de proyectos de riesgo equivalentes. La única justificación para que un proyecto se descuente con una tasa más alta es un riesgo mayor. Así, la técnica de la *TIR* viola el principio básico de las finanzas.

En una empresa, los proyectos de igual riesgo tienen el mismo costo de capital.

2. La técnica de la *TIR* viola el *principio de aditividad del valor*.

Según este principio, cada proyecto debe ser considerado de manera independiente de los demás. El siguiente ejemplo ilustra el problema:

[4] Lea la discusión sobre el *supuesto de reinversión de cupones* en la sección: "Tasas de rendimiento" del capítulo 11 (sobre los bonos con cupones).

Año	Proyecto 1	Proyecto 2	Proyecto 3	1 + 3	2 + 3
0	−100	−100	−100	−100	−200
1	0	225	450	450	675
2	550	0	0	550	0
VPN a 10%	354.3	104.5	309.0	663.3	413.6
TIR	134.5%	125.0%	350.0%	212.8%	237.5%

En este caso, los proyectos 1 y 2 son mutuamente excluyentes y el proyecto 3 es independiente de los dos. Considerado de manera independiente, el proyecto 1 es mejor que el proyecto 2, ya que tiene un mayor valor presente neto y una mayor *TIR*. En combinación con el proyecto 3, el proyecto 1 sigue siendo mejor desde el punto de vista del criterio del *VPN*. Sin embargo, si utilizáramos el criterio de la *TIR*, seleccionaríamos la combinación 2 + 3, que es claramente inferior a la combinación 1 + 2. Así, el método de la TIR viola el principio de aditividad según el cual:

$$P(1) \succ P(2) \quad \Rightarrow \quad [P(1)+P(3)] \succ [P(2)+P(3)]$$

El valor de la empresa es la suma de los valores de sus proyectos separados.

El hecho de que el criterio de la *TIR* viole el principio de aditividad significa que es necesario considerar todas las posibles combinaciones de proyectos y elegir aquella que tenga la mayor *TIR*. Si una empresa tuviera que seleccionar dos proyectos entre cinco propuestas, tendría que considerar 10 combinaciones diferentes.

En cambio, la regla del *VPN* respeta el principio de aditividad.

3. Si los flujos de efectivo cambian de signo más de una vez, puede haber varias *TIR*, la mayoría de las cuales no tienen ningún sentido económico.

Según la regla de los signos de Descartes, cada vez que los flujos de efectivo cambian de signo, el problema puede tener una nueva raíz. Para ilustrar este fenómeno presentaremos el problema de las bombas de los pozos petroleros.

Una compañía petrolera intenta decidir si debe o no instalar una bomba de alta velocidad en un pozo que ya se encuentra en operación. El costo de la bomba es de 1 600 dólares. Durante el primer año de operación producirá 10 000 dólares más de petróleo que la bomba que opera actualmente. Sin embargo, durante el segundo año, la bomba de alta velocidad producirá 10 000 dólares menos de petróleo porque el pozo ya se habrá agotado.

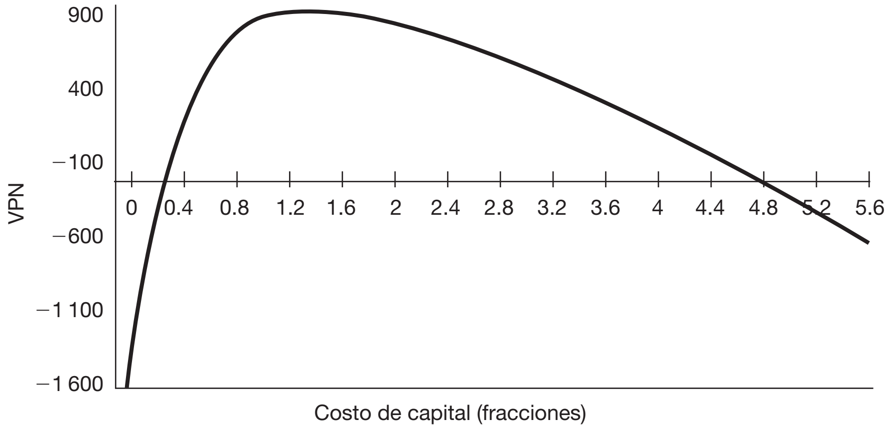
Cuadro 14.3

Flujos de la bomba del pozo de petróleo

Año	Flujo de efectivo
0	−1 600
1	10 000
2	−10 000

Figura 14.8

Tasas internas de retorno múltiples.



El *VPN* con la tasa de descuento de 10% es negativo (−773.55), por lo que el proyecto debería ser rechazado. Sin embargo, el problema tiene dos tasas internas de retorno: 25% y 400%. Ambas *TIR* son mayores que el costo de oportunidad de capital, por lo que, según el criterio de la *TIR*, el proyecto debe ser aceptado. La figura 14.8 permite entender la anomalía del criterio de la *TIR* en este caso.

Cuando el costo del capital es menor que la primera *TIR*, el valor presente neto del proyecto es negativo. La segunda *TIR* (400%) no tiene ningún sentido económico, por lo que el hecho de que el *VPN* del proyecto para $25\% < k < 400\%$ sea positivo, no significa que el proyecto deba ser aceptado.

Cada vez que se den las *TIR* múltiples, ninguna de ellas puede ser la correcta.

Cuando los flujos de efectivo cambian de signo más de dos veces puede haber más tasas internas de retorno y los resultados son difíciles de interpretar.

En resumen, la *TIR* tiene varias fallas que la vuelven poco confiable como criterio para seleccionar proyectos rentables. En primer lugar, esta técnica supone que los fondos invertidos en el proyecto tienen un costo de oportunidad igual a la misma *TIR*. Este supuesto viola el requisito de que todos los flujos de efectivo sean descontados con la misma tasa determinada por el mercado y ajustada por el riesgo de cada proyecto. En segundo lugar, la *TIR* viola el principio de aditividad del valor, lo que no permite a los administradores considerar cada proyecto de manera independiente. Finalmente, esta técnica puede conducir a soluciones múltiples, cuando los flujos de efectivo cambian de signo más de una vez.

Ya señalamos que el método del *VPN* no tiene ninguno de los defectos de la *TIR*, por lo que constituye un criterio superior desde el punto de vista analítico. La frecuencia con que se usa la *TIR* en la práctica se deriva del hecho de que la *TIR* se expresa como un rendimiento porcentual que puede ser fácilmente comparado con el costo de financiamiento. La *TIR* puede ser utilizada como un criterio inicial de selección.

Si la *TIR* de un proyecto es menor que el costo de capital, el proyecto debe ser rechazado.

La *TIR* tiene que ser complementada con el cálculo del *VPN* que representa un criterio correcto y definitivo. Más adelante presentaremos otros criterios que también se expresan en términos porcentuales pero que no tienen los defectos metodológicos de la *TIR*.

Uso de la **TIR** *para comparar alternativas*

Con todo y sus debilidades, la *TIR*, correctamente aplicada, puede ser utilizada para comparar alternativas de proyectos mutuamente excluyentes que prestan el mismo servicio. Para simplificar la exposición mantenemos el supuesto de la misma vida, pero abandonamos el supuesto del mismo costo inicial.

Imaginemos que una empresa tiene la necesidad de comprar una máquina y recibió cotizaciones de tres proveedores diferentes. Las tres máquinas tienen la misma vida esperada, de cinco años, pero las más caras tienen costos de operación más bajos y un mayor valor de salvamento. El costo de capital de la empresa es de 12%. Los datos del problema son presentados en la siguiente tabla:

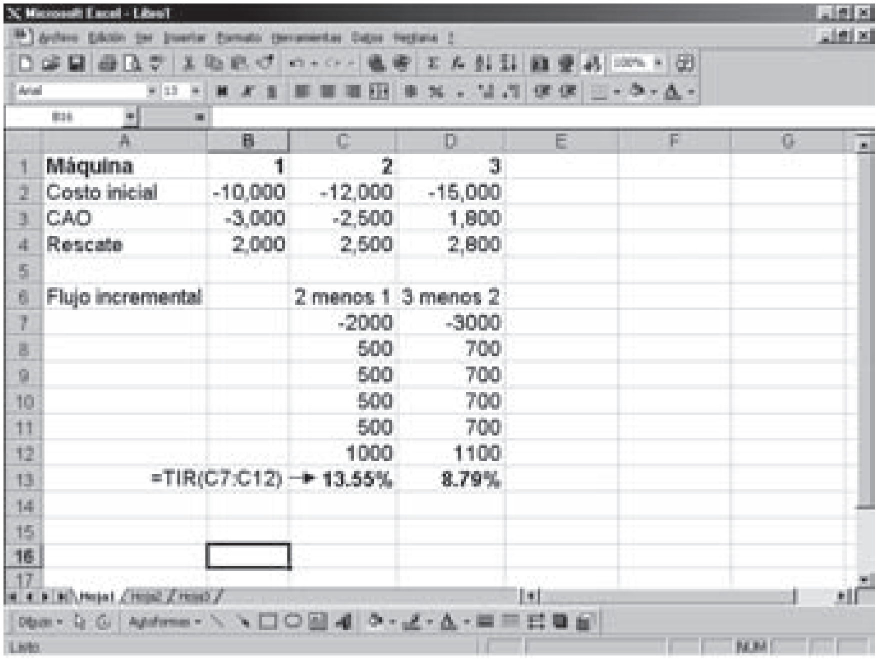
Máquina	1	2	3
Costo inicial	−10 000	−12 000	−15 000
Costo anual de operación (CAO)	−3 000	−2 500	−1 800
Valor de rescate	2 000	2 500	2 800
VP(costos) a 12%	−19 679	−19 593	−19 900

La comparación de los valores presentes de los costos indica que, dado el costo de capital, la alternativa más barata es la 2, seguida por la 1 y la más cara es la alternativa 3.

Para resolver este problema de otra manera, se calcula la *TIR* de los flujos incrementales y se compara con el costo de capital. El procedimiento correcto para hacer esta comparación consiste en los siguientes pasos:

1. Ordenamos las máquinas según el costo inicial creciente.
2. Consideramos la máquina más barata como el defensor y la inmediatamente más cara como el retador. La alternativa más cara tiene que justificar el gasto adicional en que incurre la empresa para comprarla.
3. Para obtener los flujos incrementales de los flujos de efectivo del retador restamos los flujos de efectivo del defensor.
4. Calculamos la *TIR* de los flujos incrementales.
5. Si la *TIR* calculada en el punto anterior es mayor que el costo de capital significa que los ahorros en los costos operativos en la alternativa más cara tienen un rendimiento mayor que la tasa mínima aceptable para la empresa, es decir, el gasto adicional en la máquina más cara es justificado y el defensor es eliminado.
6. Ahora el retador se convierte en defensor y la máquina más cara se convierte en el nuevo retador. Se repiten los puntos 3, 4 y 5.
7. El procedimiento se repite hasta que ninguna alternativa sea mejor que el último defensor.

Para aplicar el procedimiento esbozado con anterioridad utilizamos la hoja de cálculo.



	A	B	C	D
1	Máquina	1	2	3
2	Costo inicial	-10,000	-12,000	-15,000
3	CAO	-3,000	-2,500	1,800
4	Rescate	2,000	2,500	2,800
5				
6	Flujo incremental		2 menos 1	3 menos 2
7			-2000	-3000
8			500	700
9			500	700
10			500	700
11			500	700
12			1000	1100
13		=TIR(C7:C12) →	13.55%	8.79%

En la columna C comparamos la máquina 2 con la 1. Primero, de los flujos de efectivo de la máquina 2 restamos los flujos de efectivo de la máquina 1. El flujo en el quinto año es la suma de los ahorros en los costos de operación y la diferencia entre los valores de rescate. La tasa interna de retorno del flujo incremental es de 13.55%. Esto significa que el rendimiento del desembolso adicional en la máquina 2 es de 13.55%, mayor que el costo de capital de la empresa. Así, el gasto adicional es justificado y la máquina 2 es mejor que la máquina 1, que queda eliminada.

En la columna *D* repetimos la misma operación, pero en este caso el defensor es la máquina 2 y el retador la máquina 3. La *TIR* incremental de la diferencia entre los flujos de efectivo de las máquinas 3 y 2 es de 8.79%. Entonces, $8.79\% < k = 12\%$. Dado que el gasto adicional en la máquina 3 produce un rendimiento que es menor que el costo de capital, este gasto no se justifica y la alternativa 3 queda descartada. Así, la empresa debe comprar la máquina 2.

Dado que la máquina 2 es la más indicada, ya no es necesario comparar la alternativa 3 contra la 1. Si el lector lo hiciera, encontraría que la *TIR* del flujo incremental $(3 - 1)$ es de $10.35\% < k = 12\%$. El resultado es totalmente congruente con el que se obtuvo con el valor presente neto.

Los resultados del método *TIR* incremental son congruentes con el método del valor presente.

Si calculamos el valor presente de los flujos incrementales, constatamos que el valor presente con la tasa de descuento de 12% del flujo 2 contra 1, es positivo: \$86.1, mientras que el valor presente de flujo incremental 3 contra 2 es negativo: -249.69.

Es muy fácil extender el procedimiento al caso de muchas alternativas. En cada pareja de alternativas seleccionamos la alternativa más cara, si la *TIR* de los flujos incrementales es mayor que el costo de capital. En el caso contrario, la máquina más cara queda eliminada.

Valor terminal neto (*VTN*)

Cuando se usa una tasa de descuento que refleja de manera correcta el costo del capital ajustado por el riesgo, los valores terminales proporcionan la misma regla de decisión que los valores presentes.

El *valor terminal neto* es el valor futuro de los flujos de efectivo (valor terminal bruto) menos el valor futuro del desembolso inicial.

$$VTN = VTB - VF(I_0)$$

$$VTB = FE_1(1+k)^{n-1} + FE_2(1+k)^{n-2} + \cdots + FE_n(1+k)^{n-n} = \sum_{t=1}^{n} FE_t(1+k)^{n-t}$$

$$\boxed{VTN = VTB - VF(I_0) = \sum_{t=1}^{n} FE_t(1+k)^{n-t} - I_0(1+k)^n}$$

Utilizaremos esta fórmula para calcular el *VTN* del proyecto *B*(k = 10%).

$$VTN = 100(1.1)^3 + 200(1.1)^2 + 700(1.1)^1 + 700(1.1)^0 - 1\,000(1.1)^4 = 381$$

Si recordamos que el *VPN* del proyecto *B* es igual a 260.2, resulta más fácil calcular el *VTN*(*B*) de la siguiente manera:

$$VTN = VPN(1+k)^n = 260.2(1.1)^4 = 381$$

A continuación presentamos los valores terminales netos de los cuatro proyectos junto con sus *VPN* y su *TIR*.

Proyecto	A	B	C	D
TIR (%)	0	18.59	14.96	23.05
VPN (10%)	−136.53	260.23	109.45	238.03
VTN (10%)	−199.89	381.0	160.24	348.50

Para proyectos que tengan la misma vida, el valor terminal neto proporciona la misma asignación de rango que el valor presente neto.

Rendimiento del costo de oportunidad (*RCO*)

El *rendimiento del costo de oportunidad* (*RCO*), también conocido como *tasa externa de retorno* (*TER*), es la tasa de descuento que iguala el valor presente del valor terminal bruto con el desembolso inicial.

$$\frac{VTB}{(1+RCO)^n} = I_0 \qquad \text{donde} \qquad VTB = \sum_{t=1}^{n} FE_t(1+k)^{n-t}$$

Para calcular el *RCO* escribimos la ecuación presentada antes de la siguiente manera:

Para el proyecto *B*, por ejemplo, tenemos:

$$1\,845.1/1\,000 = (1 + RCO)^4$$

$$RCO = 1.845^{0.25} - 1 = 16.55\%$$

Al realizar los mismos cálculos para los cuatro proyectos tenemos:

Proyecto	A	B	C	D
VTB (10%)	1 264.2	1 845.1	1 624.3	1 812.6
RCO (%)	6.04	16.55	12.89	16.03
TIR (%)	0	18.59	14.96	23.05

Si comparamos la *TIR* con el *RCO* de los cuatro proyectos podemos observar que:

- Para los proyectos aceptables, el *RCO* es mayor que el costo del capital, pero menor que la *TIR*.
- Para el proyecto inaceptable, el *RCO* es menor que el costo del capital, pero mayor que la *TIR*.
- Como criterio de selección, el *RCO* produce los mismos resultados que el *VPN*.

Concretamente, cuando el *VPN* es positivo, el *RCO* es mayor que el costo del capital.

$$VPN > 0 \Leftrightarrow RCO > k$$

Para el proyecto de la bomba de petróleo (cuadro 3), el *RCO* es negativo:

$$VTB = 10\,000(1.1) - 10\,000 = 1\,000$$

$$(1 + RCO)^2 = \frac{VTB}{I_0} = \frac{1\,000}{1\,600} = 0.6256 \quad \Rightarrow \quad RCO = -20.94\%$$

Si el costo de capital es de 10%, el proyecto debe ser rechazado. El método del *RCO* es consistente con el *VPN*.

Para tener una idea más intuitiva de lo que es el *RCO* escribamos su ecuación de la siguiente manera:

$$VTB = I_0(1 + RCO)^n$$

El rendimiento del costo de oportunidad es la *tasa de crecimiento de beneficios brutos del proyecto*.

Si la inversión inicial creciera a un ritmo igual al *RCO*, después de *n* años sería igual al valor terminal bruto. La ecuación antes presentada es la conocida ecuación del crecimiento exponencial discreto. En este contexto podemos definir el rendimiento del costo de oportunidad como *tasa de crecimiento de los beneficios brutos* del proyecto o *tasa de rendimiento anual bruto*. Si esta tasa es mayor que el costo de oportunidad del capital, el proyecto es aceptable. Los rendimientos son brutos porque incluyen el rendimiento equivalente al costo de oportunidad del capital y el rendimiento neto. Más adelante aprenderemos cómo separar estos dos elementos.

Tasa interna de retorno modificada *(TIRM)*

Una variante del rendimiento del costo de oportunidad (*RCO*) es la *tasa interna de retorno modificada* (*TIRM*). Este método subsana los defectos metodológicos de la tasa interna de retorno y al mismo tiempo generaliza la técnica *RCO* cuando los flujos de efectivo cambian de signo más de una vez (de negativo a positivo y viceversa).

La *TIRM* es la tasa de descuento que iguala el valor futuro de las entradas de efectivo netas (o valor terminal bruto *VTB*) con el valor presente de las salidas de efectivo netas.

$$\frac{\text{Valor futuro de entradas de efectivo}}{(1+TIRM)^n} = \text{Valor presente de salidas de efectivo}$$

donde *n* es la vida del proyecto en periodos (años, regularmente).

Cuando el único flujo de salida es el desembolso inicial: $VP(\text{flujos de salida}) = I_0$, la fórmula presentada con anterioridad es exactamente igual a la fórmula del rendimiento del costo de oportunidad: $TIRM = RCO$.

$$\frac{VTB}{(1+RCO)^n} = I_0$$

Si reordenamos la fórmula de la *TIRM* tenemos:

$$\frac{VF(\text{flujos de entrada})}{VP(\text{flujos de salida})} = (1+TIRM)^n$$

Calculada de esta manera, la *TIRM* siempre es única (no hay problemas de *TIR* múltiples) y como criterio de selección es consistente con el valor presente neto. El criterio *TIRM* se utiliza sobre todo en los proyectos en los cuales los flujos de efectivo cambian de signo más de una vez.

Hay dos variantes de la *TIRM*. En la primera, para calcular el valor presente de los flujos negativos y el valor futuro de los flujos positivos, se usa la misma tasa que representa el costo de oportunidad del capital. En este caso el procedimiento de cálculo puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Calculamos el valor presente de todos los flujos netos que tienen el signo negativo (salidas de efectivo).
2. Calculamos el valor futuro de todos los flujos netos que tienen el signo positivo (entradas de efectivo).
3. Utilizamos la fórmula para despejar la *TIRM*.

Como primer ejemplo, calcularemos la *TIRM* para el proyecto de la bomba del pozo de petróleo, utilizando los datos del cuadro 3 y suponiendo $k = 10\%$.

1. $$VP(\text{flujos de salida}) = 1\,600 + \frac{10\,000}{(1.1)^2} = 9\,864.46$$
2. $$VF(\text{flujos de entrada}) = 10\,000(1.1) = 11\,000$$
3. $$(1 + TIRM)^2 = \frac{11\,000}{9\,864.46} = 1.1151$$

$$TIRM = \sqrt{1.1151} - 1 = 0.056 = 5.6\%$$

Así, tenemos una sola tasa interna de retorno menor que el costo del capital, por lo que el proyecto debería ser rechazado. Este resultado concuerda con el criterio *VPN*.

Ahora calculemos la *TIRM* del proyecto A cuyos flujos de efectivo están en el cuadro 1.

1. $$VP(\text{flujos de salida}) = 1\,000 + \frac{300}{(1.1)^4} = 1\,204.9$$
2. $$VF(\text{flujos de entrada}) = 200(1.1)^3 + 800(1.1)^2 + 300(1.1) = 1\,564.2$$
3. $$(1 + TIRM)^4 = \frac{1\,564.2}{1\,204.9} = 1.2982$$

$$TIRM = \sqrt[4]{1.2982} - 1 = 0.0674 = 6.74\%$$

Dado que la *TIRM* es menor que el costo del capital, el proyecto debería ser rechazado.

El *RCO* para el proyecto A fue de 6.04%. Para los proyectos *B*, *C* y *D* la *TIRM* es idéntica al *RCO*. La diferencia entre los dos métodos consiste en el tratamiento de los flujos negativos (de salida) que se dan fuera del periodo cero. Según el método del *RCO*, estos flujos se llevan al último periodo y se restan del valor terminal bruto. Según el método de la *TIRM* estos flujos se llevan al presente y se suman al desembolso inicial.

Un método alternativo para calcular la *TIRM* consiste en utilizar una tasa de descuento para calcular el valor presente de los flujos de salida [*VP*(*FS*)] y otra tasa (de rendimiento) para calcular el valor futuro (terminal) de los flujos de entrada [*VF*(*FE*)]. Los flujos de caja negativos se descuentan con una tasa libre de riesgo (R_F): lo que pagan los bonos del gobierno, o lo que ganaría un depósito en efectivo en un banco. En cambio, los flujos de caja positivos se llevan a futuro con una tasa que refleja el rendimiento de una inversión de riesgo equivalente (R_i). Para este fin se puede utilizar, por ejemplo, el modelo *CAPM* (modelo de valuación de activos de capital). Este rendimiento consiste en dos elementos: la tasa libre de riesgo y la prima de riesgo proporcional a la variabilidad de los rendimientos del tipo de proyectos que estamos tratando.

La lógica que sostiene este enfoque es la siguiente: Si no gastáramos los fondos en nuestro proyecto, lo que podríamos ganar con estos fondos es, cuando mucho, el rendimiento libre de riesgo. En cambio, los fondos invertidos en el proyecto deberían producir por lo menos el rendimiento ajustado por el riesgo para proyectos de riesgo equivalente.

EJEMPLO 1

Tenemos oportunidad de invertir en un proyecto que ofrece los siguientes flujos de efectivo.

Periodo	0	1	2	3	4	5	6	7
FE	−200	100	−100	200	300	−200	600	−200

La tasa libre de riesgo es de 8% y la tasa de rendimiento de proyectos de riesgo equivalente es de 12%. ¿Cuál es la *TIRM* del proyecto?, ¿debería aceptarse o rechazarse el proyecto?

Solución: Primero calculamos el valor presente de los flujos de salida utilizando, como tasa de descuento, la tasa libre de riesgo, $R_F = 8\%$:

$$VP(FS) = 200 + \frac{100}{(1.08)^2} + \frac{200}{(1.08)^5} + \frac{200}{(1.08)^7} = 538.55$$

Después, calculamos el valor futuro (terminal) de los flujos de entrada utilizando la tasa de rendimiento de 12%:

$$VF(FE) = 100(1.12)^6 + 200(1.12)^4 + 300(1.12)^3 + 600(1.12) = 1\,605.56$$

Ahora podemos calcular la *TIRM*:

$$(1 + TIRM)^7 = \frac{1\,605.56}{538.55} = 2.9813 \qquad \Rightarrow \qquad TIRM = 2.9813^{1/7} - 1 = 0.1689 = 16.89\%$$

Respuesta: La tasa interna de retorno modificada (*TIRM*) del proyecto es igual a 16.89%.

Dado que la *TIRM* es mayor que el rendimiento en proyectos de riesgo equivalente, el proyecto debería ser aceptado.

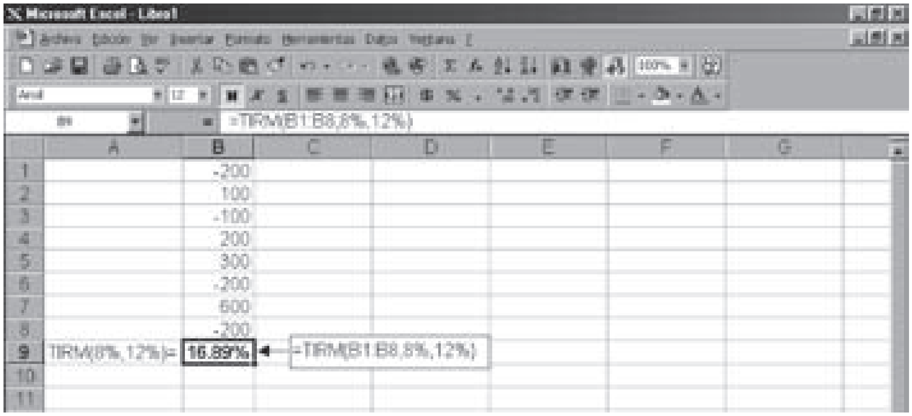
Para poner este resultado en perspectiva calcularemos el valor presente neto, la tasa interna de retorno del proyecto y el *RCO*, utilizando una tasa de interés de 12%.

$$VPN = 242.56, \quad TIR = 38.94\%, \quad RCO = 25.46\%,^{5} \quad IR = 2.21,\ TRP = 26.52\%$$

[5] En proyectos con varios flujos de salida no es correcto tomar el primer flujo como único costo del proyecto. En estos casos la *TIRM* es muy superior al *RCO*.

Con todos los criterios, el proyecto es aceptable.[6]

En Excel, para calcular la tasa interna de retorno modificada, utilizamos la función *TIRM*, que tiene la siguiente sintaxis: *TIRM* (valores, tasa_financiamiento, tasa-reinversión), donde *valores* representan la columna (o fila) de los flujos de efectivo del proyecto con sus respectivos signos, *tasa_financiamiento* es la tasa a la que se lleva los flujos negativos al presente y *tasa_reinversión* es la tasa con la que se lleva los flujos positivos al futuro. Una pantalla de Excel, con la solución del ejemplo 1, aclara el procedimiento.



La tasa interna de retorno modificada no es muy utilizada en la práctica porque resulta difícil darle una interpretación económica clara.

En el siguiente ejemplo veremos que, en caso de la *TIR* múltiple, la *TIRM* puede no proporcionar un criterio correcto de selección.

EJEMPLO 2

Un proyecto con un costo inicial de $1 500 produce los siguientes flujos de efectivo en cada uno de los siete años de su vida.

Periodo	0	1	2	3	4	5	6	7
FE	−1 500	1 000	1 000	300	300	400	400	−2 000

Si el costo del capital es de 10%, el valor presente neto del proyecto es 113.68, por lo que el proyecto resulta aceptable. Si tratamos de calcular la *TIR* del proyecto, obtendremos dos resultados: $TIR_1 = 2.71\%$ y $TIR_2 = 27.87\%$. Obviamente, no sabemos cuál *TIR* tomar como base de decisión. Si por casualidad calculáramos la segunda *TIR* en el primer intento, pensaríamos que el proyecto es muy bueno y lo aceptaríamos. En definitiva, la *TIR* convencional no es un criterio confiable cuando los flujos de efectivo cambian de signo más de una vez.

Para ver mejor el problema presentamos la gráfica (figura 14.9) del valor presente neto contra diferentes tasas de descuento.

[6] Los criterios *IR* y *TRP* se explican en páginas siguientes.

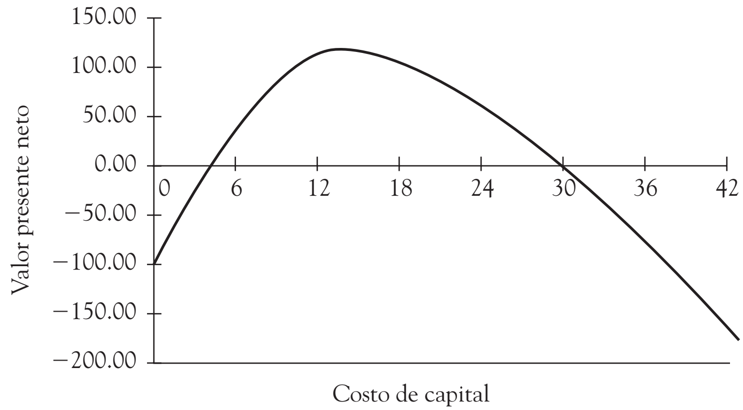


Figura 14.9

Perfil del *VPN* con la *TIR* doble.

El proyecto tiene el valor presente neto positivo (bastante bajo) para las tasas de descuento ubicadas entre los dos valores de la *TIR*.

$$VPN > 0 \qquad \text{para} \qquad TIR_1 < k < TIR_2$$

Ahora calcularemos la *TIRM*, bajo el supuesto de que la tasa libre de riesgo es de 9% y el rendimiento requerido para un proyecto de riesgo equivalente es de 12%.

1. Calculamos el valor presente de los flujos de salida con la $R_F = 9\%$:

$$VP(FS) = 1\,500 + \frac{2\,000}{(1.09)^7} = 2\,594.07$$

2. Calculamos el valor futuro de los flujos de entrada con la $R = 12\%$:

$$VF(FE) = 1\,000(1.12)^6 + 1\,000(1.12)^5 + 300(1.12)^4 + 300(1.12)^3 + \\ + 400(1.12)^2 + 400(1.12)^1 = 5\,579.46$$

3. Ahora podemos despejar la *TIRM*:

$$(1 + TIRM)^7 = \frac{5\,579.46}{2\,594.07} = 2.15 \qquad \Rightarrow \qquad TIRM = 2.15^{1/7} - 1 = 0.1156 = 11.56\%$$

La *TIRM* es mayor que la R_F pero menor que el rendimiento requerido. Al aplicar este criterio, el proyecto no parece muy bueno.

El ejemplo 2 indica que el criterio de la *TIRM*, aunque no tiene los defectos de la *TIR*, no es un criterio tan bueno como el *VPN*. No lo recomendamos y su inclusión en este texto se debe sólo al deseo de hacer la presentación de los criterios de selección de proyectos lo más completa posible.

Índice de rentabilidad (*IR*)

El método utilizado con frecuencia por los gobiernos y las organizaciones internacionales es el *índice de rentabilidad*, conocido también como *relación beneficio/costo* (B/C). El índice de rentabilidad compara los beneficios del proyecto con sus costos. Dependiendo del tratamiento de los costos, existen dos versiones de la relación B/C. En la versión convencional del *IR*, el valor presente de los costos anuales relacionados con el mantenimiento y la operación del proyecto se suman al costo inicial. En el numerador se coloca sólo el valor presente de los beneficios:

$$IR(\text{convencional}) = \frac{VP(\text{beneficios})}{I_0 + VP(\text{costos de operación})}$$

La versión del *IR* que recientemente gana más aceptación se llama *índice de rentabilidad modificado*. Según este enfoque, el valor presente de los costos de operación se resta de los beneficios y el valor presente de los beneficios netos así obtenidos se divide entre el desembolso inicial. De acuerdo con nuestra terminología, el valor presente de los beneficios netos no es otra cosa que el valor presente bruto.

$$IR(\text{modificado}) = \frac{VP(\text{beneficios}) - VP(\text{costos de operación})}{I_0} = \frac{VPB}{I_0}$$

El valor presente de cualquier valor de rescate se resta del denominador.

De ahora en adelante, en lugar de índice de rentabilidad modificado escribiremos simplemente índice de rentabilidad.

De la fórmula se desprende que el índice de rentabilidad es el valor presente de los beneficios generados por el proyecto durante su vida por cada peso de desembolso. Es el incremento del valor presente por cada peso invertido.

Para el proyecto *B*, el $IR = 1\,260.23/1\,000 = 1.26$.

Esto significa que, descontados con el costo de oportunidad del capital, los beneficios del proyecto *B* son 1.26 veces mayores que su costo.

Al hacer los cálculos correspondientes encontramos que:

$$IR_A = 0.86,\ IR_C = 1.109,\ IR_D = 1.238.$$

La regla de decisión, con el índice de rentabilidad, es que los proyectos cuyo *IR* sea mayor que uno son aceptables. Entre dos proyectos mutuamente excluyentes con $IR > 1$, seleccionar aquel que tiene el *IR* mayor.

$IR > 1 \quad \Rightarrow \quad$ aceptar

$IR_A > \text{IRB} \quad \Rightarrow \quad A \succ B \qquad (IR_A > 0 \text{ e } IR_B > 0)$

Para proyectos de igual desembolso inicial (del mismo tamaño), el índice de rentabilidad proporciona el mismo criterio de selección que el *VPN*. En realidad, los dos criterios presentan la misma información, pero de manera distinta. El valor presente neto es el valor presente bruto menos el desembolso inicial, mientras que el índice de rentabilidad es el valor presente bruto dividido entre el desembolso inicial.

$$VPN = VPB - I_0 \qquad \text{e} \qquad IR = \frac{VPB}{I_0}$$

Puede ser más fácil entender el concepto del índice de rentabilidad expresándolo en función del *VPN*.

$$IR = \frac{VPB}{I_0} = \frac{I_0 + VPN}{I_0} = 1 + \frac{VPN}{I_0}$$

En esta fórmula se ve claramente que el índice de rentabilidad es mayor que uno sólo si el valor presente neto es positivo.

El índice de rentabilidad no debe ser utilizado para comparar proyectos de distinto tamaño o con vidas diferentes.

$$VPN > 0 \quad \Leftrightarrow \quad IR > 1$$

El *IR* es un buen criterio de selección, pero al utilizarlo hay que ser muy cuidadosos.

Para ilustrar el primer punto consideremos dos proyectos mutuamente excluyentes con la misma vida. El primero implica un desembolso inicial de 100 000 pesos y durante su vida produce el valor presente bruto de 130 000. El segundo requiere una inversión de un millón y produce el valor presente bruto de 200 000. En la siguiente tabla se muestran los valores presentes netos y los índices de rentabilidad de los dos proyectos.

Proyecto	1	2
VPN(10%)	30 000	200 000
IR	**1.3**	**1.2**

Supongamos que la empresa no tiene problemas con el financiamiento (no existe el problema de racionamiento del capital). Según el criterio del *VPN* debería seleccionarse el proyecto 2, lo que sería una decisión correcta dado que éste aumenta más el valor de la empresa que el proyecto 1. Sin embargo, el criterio del índice de rentabilidad señala que el proyecto 1 es el mejor, ya que tiene una mejor relación beneficio/costo. En este caso, el criterio del *IR* arroja resultados erróneos.

Para ilustrar el segundo punto imaginemos dos proyectos mutuamente excluyentes (3 y 4) con el mismo desembolso inicial, pero con diferentes vidas. El costo de cada uno de los proyectos es de $10 000. El costo de capital es de 10%. Los flujos de efectivo de los dos proyectos se presentan en el cuadro 14.4.

Cuadro 14.4

Proyectos con vidas diferentes.

Año	Proyecto 3	Proyecto 4
0	−10 000	−10 000
1	5 000	1 500
2	5 000	2 000
3	3 000	2 500
4		5 000
5		5 000

A continuación se presentan los resultados de los cálculos de todos los criterios de selección, discutidos hasta ahora. El lector debe comprobarlos.

Proyecto	3	4
PR (años)	2	entre 3 y 4
VTB	14 550.00	18 383.36
VPB	10 931.63	11 414.00
VPN	931.63	1 414.00
TIR (%)	15.66	14.33
RCO (%)	13.32	12.95
IR	**1.09**	**1.14**

El proyecto 4 tiene un índice de rentabilidad mayor que el proyecto 3. Esto no significa que sea mejor. Puesto que los proyectos tienen vidas diferentes, estrictamente hablando, no son comparables. Más adelante estudiaremos en detalle el problema de los proyectos con vidas diferentes. En este momento, sólo podemos constatar que la relación beneficio/costo en el proyecto 4 es mayor porque este proyecto dura dos años más que el proyecto 3. En este caso es mejor utilizar el criterio *TIR* o el criterio *RCO*. Según estos dos criterios, el proyecto 3 es mejor, y así es en realidad. El criterio *VPN* aparentemente falla porque no está ajustado por la diferencia de las vidas de los proyectos.

El índice de rentabilidad puede ser usado como una *medida de riesgo*. Nos dice qué tanto pueden bajar los beneficios antes de que el proyecto empiece a reducir el valor de la empresa. *IR* = 1.2, por ejemplo, implica que si los beneficios esperados durante la vida del proyecto no bajan más de 20%, el proyecto hará una contribución positiva al valor.

Para encontrar la relación entre el rendimiento del costo de oportunidad, el costo del capital y el índice de rentabilidad, empezamos con la definición del *RCO*.

$$(1+RCO)^n = \frac{VTB}{I_0}$$

Sustituimos el valor terminal bruto por el valor presente bruto llevado al futuro:

$$(1+RCO)^n = \frac{VPB(1+k)^n}{I_0} \qquad \text{donde} \qquad VTB = VPB(1+k)^n$$

Sin embargo, el valor presente bruto dividido entre la inversión inicial es el índice de rentabilidad:

$$IR = \frac{VPB}{I_0}$$

Así, la relación buscada entre el índice de rentabilidad, el costo del capital y el rendimiento del costo de oportunidad es:

$$\boxed{(1+RCO)^n = IR(1+k)^n}$$

Si despejamos de esta relación el índice de rentabilidad, tenemos:

$$IR = \frac{(1+RCO)^n}{(1+k)^n} = \left(\frac{1+RCO}{1+k}\right)^n$$

De donde

$$\frac{1+RCO}{1+k} = IR^{\frac{1}{n}}$$

$IR^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{IR}$ es uno más la *tasa de crecimiento de los beneficios netos* (rendimiento del proyecto neto del costo de capital), calculada como promedio geométrico.

En el proyecto B, por ejemplo, $IR_B = 1.26$, $n = 4$. Así $1.26^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{1.26} = 1.0595$; $0.0595 = 5.95\%$ es la tasa de crecimiento del beneficio neto del proyecto B. El término neto se refiere a la exclusión de los costos de capital. Esto quiere decir que a partir del valor inicial de $1 000, el valor del proyecto B crece a un ritmo anual promedio de 5.95%, después de deducir el costo de capital. En otras palabras, el rendimiento neto del proyecto B es de 5.95%.

Ahora podemos resumir la discusión anterior en la siguiente fórmula:

$$1 + RCO = IR^{\frac{1}{n}}\,(1+k)$$

$$1 + RCO = \underbrace{IR^{\frac{1}{n}}}_{1+\text{ el rendimiento neto}}\ \underbrace{(1+k)}_{1+\text{el costo de capital}}$$

De esta fórmula se deduce que el rendimiento del costo de oportunidad es un criterio correcto para la selección de los proyectos de inversión. Incluye tanto el costo de oportunidad del capital que tiene que cubrir cada proyecto aceptable, como el rendimiento neto (el ritmo de crecimiento de los beneficios netos), lo que permite seleccionar los mejores proyectos

$RCO > k \Rightarrow$ el proyecto genera beneficios por arriba del costo de capital.

Ahora ya sabemos cómo utilizar el criterio del índice de rentabilidad en el caso de los proyectos con vidas diferentes. Simplemente comparamos la n-ésima raíz de dicho índice para diferentes proyectos. El proyecto cuya n-ésima raíz del índice de rentabilidad sea mayor debería ser seleccionado. Si expresamos este criterio en símbolos tenemos:

$$\boxed{\sqrt[n_A]{IR_A} > \sqrt[n_B]{IR_B} \qquad \Rightarrow \qquad A \succ B}$$

Ahora podemos utilizar este criterio para comparar el proyecto 3 con vida de tres años, con el proyecto 4 con vida de cinco años. $IR_3 = 1.09$, $n_3 = 3$, $IR_4 = 1.14$, $n_4 = 5$.

$$1.09^{\frac{1}{3}} = 1.0291 > 1.14^{\frac{1}{5}} = 1.0266$$

La n-ésima raíz del índice de rentabilidad, donde n es la vida del proyecto en años, es un criterio correcto para comparar proyectos con vidas diferentes.

El proyecto 3 es mejor porque los beneficios netos crecen más rápidamente (2.91%) que en el proyecto 4 (2.66%).

Tasa de rendimiento a perpetuidad (*TRP*)

La *tasa de rendimiento a perpetuidad* es el índice de rentabilidad multiplicado por la tasa que representa el costo de oportunidad del capital:

$$TRP = IR \cdot k$$

Para el proyecto B, por ejemplo, la tasa de rendimiento a perpetuidad es igual a 1.26 (0.1) = 12.6%. La *TRP* permite comparar proyectos en términos porcentuales, tal como la *TIR*, pero sin incurrir en los errores metodológicos implícitos en ella. Esta técnica es totalmente equivalente al valor presente neto y resulta útil para comparar proyectos de la misma escala, con la misma vida, y con el mismo riesgo.

La perpetuidad es una anualidad que continúa para siempre. En el capítulo sobre anualidades vimos que el valor presente de la perpetuidad es el pago dividido entre la tasa de interés.

$$VPA_{R,\infty} = \frac{a}{R} = \frac{\text{pago (o renta)}}{\text{tasa de interés}}$$

David Ricardo utilizaba la fórmula de perpetuidad para calcular el valor de la tierra.

$$\text{Valor} = \frac{\text{Renta}}{\text{Tasa de interés}}$$

La tasa de rendimiento a perpetuidad es la *renta anual vitalicia generada por cada peso de desembolso* en el proyecto.

Si lo que conocemos es el valor y la tasa de interés (R), podemos utilizar esta fórmula para calcular el valor de la renta.

$$\text{Renta} = \text{Valor} \times R$$

En vista de la discusión anterior resulta claro que:

$$TRP = \underbrace{IR}_{\substack{VP \text{ del proyecto} \\ \text{por un peso} \\ \text{de desembolso}}} \times \underbrace{k}_{\substack{\text{tasa de interés} \\ \text{(costo de capital)}}}$$

En el caso del proyecto B, cada peso de inversión genera una renta anual perpetua de 12.6 centavos.

Tenemos que recalcar que el criterio *TRP* es lo mismo que el valor presente neto pero en términos porcentuales. Es un buen sustituto de la *TIR*. Sin embargo, la *TRP* no puede ser utilizada para comparar proyectos de diferentes tamaños, con vidas diferentes o de diferente riesgo.

En resumen, podemos afirmar que el mejor método para evaluar los proyectos es el valor presente neto. Éste cumple con todos los requisitos metodológicos:

- Toma en cuenta todos los flujos de efectivo.
- Descuenta estos flujos con la tasa que representa el costo de oportunidad de capital ajustado por el riesgo.
- Obedece al principio de aditividad del valor.
- Maximiza el valor de la empresa.

De los diferentes indicadores porcentuales discutidos, los mejores son:

- El rendimiento del costo de oportunidad (rendimiento bruto).
- La *n*-ésima raíz del índice de rentabilidad (rendimiento neto), donde *n* es la vida del proyecto en años.

EFECTOS DE LA INFLACIÓN

Puesto que los flujos de efectivo generados por un proyecto de inversión se darán en el futuro, es necesario corregirlos por la *inflación*. Ésta puede ser neutral y no neutral.

La *inflación neutral* tiene lugar si todos los precios y los costos aumentan en forma proporcional. No hay ganadores ni perdedores. El análisis de rentabilidad de proyectos de inversión arroja los mismos resultados en términos nominales y en términos reales.

Si la inflación neutral es plenamente anticipada por los agentes económicos, ya está incluida en la tasa de interés nominal a través de la relación de Fisher.

$$1 + R = (1 + r)[1 + E(i)] \qquad \text{de donde} \qquad R = r + E(i) + rE(i)$$

donde R es la tasa nominal,
r es la tasa real,
$E(i)$ es la tasa de la inflación esperada.

En el contexto de la evaluación de proyectos habría que sustituir la tasa de interés por el costo del capital, k.

Tanto los ingresos en términos nominales como los costos crecerán al ritmo de la inflación, pero al mismo tiempo serán descontados por una tasa que representa el costo de capital en términos nominales. Esta tasa ya incluye la inflación esperada. El resultado es el mismo, independientemente de si valuamos los flujos de efectivo en términos reales (por ejemplo en Udis) y utilizamos como tasa de descuento la tasa real, o calculamos los flujos en términos nominales y los descontamos con la tasa nominal que incluye la inflación esperada.

Para ilustrar este punto volvemos a calcular el *VPN* del proyecto *B* en términos nominales y en términos reales. Supongamos que la inflación esperada durante la vida del proyecto es de 6% anual. Si el costo del capital en términos nominales es de 10% (k_{nom} = 10%), el costo del capital en términos reales, k_r, será:

$$k_r = \frac{k_{nom} - i}{1 + i} = \frac{0.1 - 0.06}{1.06} = 0.0377 = 3.77\%$$

Para calcular los flujos en términos reales, dividimos los flujos en términos nominales por $(1 + i)^t = (1.06)^t$. Para calcular el *VPN* en términos reales utilizamos la tasa de descuento, $k_r = 3.77\%$.

Año	Flujos en términos nominales	$\frac{1}{(1.06)^t}$	Flujos en términos reales (2×3)
0	−1 000	1	−1 000
1	100	0.9434	94.34
2	200	0.8900	177.99
3	700	0.8396	587.73
4	700	0.7921	554.46
	$VPN_{(k=10\%)} = 260.22$		$VPN_{(k=3.77\%)} = 260.22$

El lector debe comprobar estos cálculos.

Para consolidar la comprensión de los computos en términos nominales y reales, con una inflación neutral, ofrecemos un ejemplo más sencillo.

Supongamos que el costo inicial de un proyecto es de \$100. Al cabo de un año producirá un flujo de efectivo (nominal) de \$138. El costo del capital (nominal) es de 15% y la inflación esperada es de 10%.

Datos:

$$I_0 = \$100, \qquad FE_1 = \$138, \qquad k_{nom} = 15\%, \qquad i = 10\%$$

Si usamos los términos nominales, el *VPN* del proyecto es igual a \$20.

$$VPN = \frac{FE_1}{(1 + k_{nom})^1} - I_0 = \frac{138}{1.15} - 100 = 20$$

Para calcular el *VPN* en términos reales, primero tenemos que computar la tasa real:

$$k_r = \frac{k_{nom} - i}{1 + i} = \frac{0.15 - 0.1}{1.1} = 0.0455 = 4.55\%$$

Después, calculamos el valor del flujo de efectivo en términos reales:

$$FE_1(\text{real}) = \frac{FE_1}{(1 + i)^1} = \frac{138}{1.1} = 125.45$$

Ahora podemos calcular el *VPN* utilizando la tasa real como tasa de descuento:

$$VPN = \frac{FE_1(\text{real})}{(1 + k_r)^1} - I_0 = \frac{125.45}{1.0455} - 100 = 20$$

No debería sorprender que el resultado sea idéntico, porque en términos reales hemos llevado a cabo la misma operación aritmética que en términos nominales, pero en dos etapas.

$$VPN = \frac{FE_1}{(1+k_{nom})} - I_0 = \frac{FE_1}{(1+i)(1+k_r)} - I_0 = \frac{FE_1\,(\text{real})}{(1+k_r)} - I_0$$

RECOMENDACIÓN

Cuando la inflación es neutral, es preferible calcular los flujos de efectivo futuros a precios constantes y, para los fines de descuento, utilizar la tasa de interés real ajustada por el riesgo.

$k = r +$ prima de riesgo.

La *inflación no neutral* significa que los precios de venta y los costos pueden subir a tasas diferentes, de manera que hay ganadores y perdedores. La empresa se ve favorecida por la inflación, si los precios de los productos que vende suben más rápido que los precios de los insumos intermedios que compra y los costos de su mano de obra. Si los costos de la empresa suben a mayor ritmo que los precios de sus productos, la empresa sale perjudicada por la inflación.

Si la inflación es provocada por la devaluación de la moneda nacional, por ejemplo, las empresas exportadoras que usan muchos insumos nacionales ganan, y las empresas orientadas al mercado interno que usan muchos insumos importados pierden.

Quien gana y quien pierde con la inflación depende de la naturaleza de los cambios estructurales que experimenta la economía. Las únicas generalizaciones que se pueden hacer son las siguientes:

1. Si la inflación real es mayor que la inflación anticipada (la inflación se acelera) ganan los deudores y pierden los acreedores.
2. Si la inflación real es menor que la anticipada (durante el proceso de deflación) ganan los acreedores a costa de los deudores.
3. Cuando el sistema impositivo no está indexado a la inflación gana el gobierno y pierden los contribuyentes. Se reduce la protección fiscal de la depreciación y los que pagan el impuesto sobre la renta entran en tramos impositivos más altos, no porque subieron sus ingresos reales, sino porque sus ingresos en términos nominales son más altos. Los inversionistas tienen que pagar el impuesto sobre la ganancia de capital, aun cuando el valor real de los activos que venden no haya subido.
4. Si la inflación es provocada por la devaluación de la moneda nacional, ganan los exportadores y pierden las empresas que dependen mucho de las importaciones.
5. La inflación puede perjudicar a los trabajadores, sobre todo si tiene lugar en una economía deprimida (estanflación = estancamiento + inflación).

Cuando la inflación es alta, variable y no neutral, la evaluación cuantitativa de los proyectos de inversión a mediano y largo plazos se vuelve prácticamente imposible.

Cuando se espera una inflación no neutral, la evaluación de los proyectos de inversión es muy complicada. Hay que hacer las proyecciones de los precios de cada elemento de ingresos y gastos por separado y tomar en cuenta el efecto fiscal de la inflación.

Bajar la inflación no es un fin en sí mismo, sino un medio para acelerar el proceso de inversión productiva y el crecimiento económico.

En este caso, la administración de la empresa tiene la opción de abstenerse de cualquier proyecto que dure más de un año o guiarse por intuición y experiencia. Una inflación alta, impredecible y no neutral frena el proceso de inversión productiva, por lo que desacelera el proceso de crecimiento económico.

En México, el sistema impositivo está indexado a la inflación y el gobierno no se beneficia de la misma. Bajar la inflación a un nivel por debajo de 4% es uno de los objetivos de la política económica tanto del Banco de México como del gobierno.

PROYECTOS CON VIDAS DIFERENTES

El criterio del valor presente neto se aplica a proyectos mutuamente excluyentes con la misma vida económica y con el mismo desembolso inicial. Cuando los proyectos tienen vidas diferentes, el método tiene que ser modificado. Una manera de comparar los proyectos con vidas diferentes es repetirlos tantas veces que la duración de la serie de repeticiones del proyecto *A* sea igual a la del proyecto *B*.

EJEMPLO 1

De dos proyectos, *E* y *F*, que tienen el mismo desembolso, ¿cuál deberíamos escoger, si el proyecto *E* tiene una vida de dos años y su valor presente neto es de $200 y el proyecto *F* tiene una vida de tres años y su valor presente neto es de $300? Se supone que el costo del capital aplicable es de 10%.

Para resolver este problema seleccionamos “seis años” como el periodo de comparación. Esto se debe a que seis se divide entre dos y tres. Ahora tenemos que contestar a las siguientes preguntas: ¿cuál es el valor presente del proyecto *E* si éste se repite tres veces? y, ¿cuál es el valor presente del proyecto *F* si éste se repite dos veces?

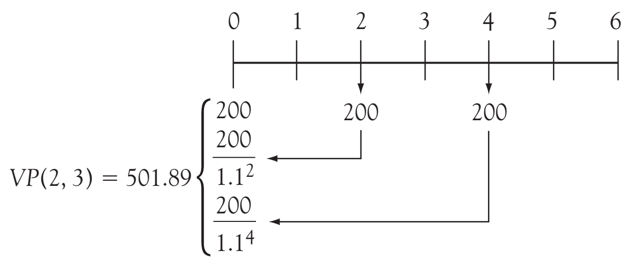
$VPN_{2,3}$ es valor presente neto del proyecto con vida de dos años repetido tres veces (*E*). Calculamos este valor al sumar los valores presentes del proyecto E que se presentarán en periodos 0, 2 y 4.

$$VPN_{2,3} = 200 + \frac{200}{1.1^2} + \frac{200}{1.1^4} = 501.89$$

La línea de tiempo explica este cálculo (véase figura 14.10).

Figura 14.10

Valor presente neto de un proyecto de dos años que se repite tres veces.



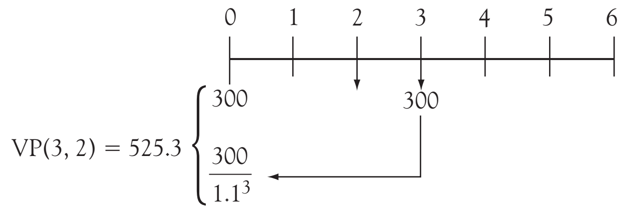
El valor presente del proyecto con vida de tres años (F) repetido dos veces es:

$$VPN_{3,2} = 300 + \frac{300}{1.1^3} = 525.39$$

En este caso, la línea de tiempo tiene la siguiente forma:

Figura 14.11

Valor presente neto de un proyecto de tres años que se repite dos veces.



Dado que $VPN_{3,2} > VPN_{2,3}$, deberíamos seleccionar el proyecto F, con vida económica de tres años. Sin embargo, si el valor presente del proyecto F fuese 250 en lugar de 300, el proyecto E sería mejor. El lector debería comprobar esta afirmación.

El procedimiento antes esbozado puede resultar muy engorroso, sobre todo si hay varios proyectos con vidas diferentes. Si tuviéramos cuatro proyectos con vidas de cuatro, cinco, siete y nueve años, por ejemplo, el periodo de comparación sería de 1 260 años y los cálculos serían muy tediosos.

La mejor manera de comparar proyectos con vidas diferentes es suponer que cada proyecto se repite a una escala constante para siempre. En otras palabras, tenemos que calcular $VPN_{n,\infty}$, o sea, el valor presente del proyecto con vida de n años repetido un número infinito de veces. De esta manera, todos los proyectos se vuelven comparables ya que tienen la misma vida: infinita. El valor presente neto de una corriente infinita de proyectos que se repiten cada n años es equivalente al VPN de una estrategia a largo plazo consistente en invertir en el proyecto con una vida de n años.

Para calcular $VPN(n, \infty)$, primero vamos a repasar el concepto de *serie neta uniforme* (*SNU*), también conocida como *serie equivalente de anualidades anuales*,[7] o *serie anual uniforme*.

La *SNU* es el ingreso anual que generaría el valor presente neto de un proyecto con una vida n durante los n años de su vida. En otras palabras, el VPN_n es equivalente a recibir un pago igual a la *SNU* al final de cada año de vida del proyecto. La *SNU* es el pago periódico en la fórmula del valor presente de una anualidad ordinaria:

$$VPN_n = \frac{SNU}{k}\left(1 - \frac{1}{(1+k)^n}\right)$$

[7] En inglés esta cantidad se llama Equivalent Annual Annuity Series (EAS) o Uniform Annuity Series.

Recibir la SNU cada año es lo mismo que recibir el *VPN* (*n*) cada *n* años.

donde VPN_n es el valor presente de un proyecto que dura n periodos,

SNU es el pago anual,

k es la tasa de interés, igual al costo de capital.

En la fórmula antes presentada se ve con claridad que la *SNU* de un proyecto es el pago anual que se recibiría si se invirtiera el *VPN* del proyecto en una anualidad de n años, con una tasa de interés igual al costo de oportunidad del capital, k. Es el *VPN* expresado como un pago anual equivalente.

En la figura 14.12 se presenta el concepto de *SNU* para un proyecto con vida de tres años.

Si los proyectos con vidas diferentes tienen la misma escala y su riesgo es igual (usan la misma tasa de descuento), el proyecto que genera una mayor *SNU* es el mejor.

$$SNU_A > SNU_B \qquad \Rightarrow \qquad A \succ B$$

Utilizaremos este criterio para comparar los proyectos 3 y 4 (cuadro 14.4). El proyecto 3 tiene vida de tres años y su valor presente neto es: $VPN(3) = 931.63$. El proyecto 4 tiene vida de cinco años y su $VPN(5) = 1\ 414$. Para comparar estos proyectos, primero tenemos que calcular la *SNU* de cada uno. La *SNU* es igual al valor presente neto dividido entre el factor del valor presente de la anualidad (la expresión entre corchetes).

$$SNU = \frac{k \times VPN(n)}{1 - \dfrac{1}{(1+k)^n}}$$

$$SNU(3) = \frac{931.63}{2.4869} = 374.62 \qquad \text{y} \qquad SNU(4) = \frac{1\ 414}{3.7908} = 373.13$$

Dado que la *SNU*(3) es mayor que la *SNU*(4), el proyecto 3 es mejor que el 4. Obtuvimos el mismo resultado que con los criterios del rendimiento del costo de oportunidad (*RCO*) y la n-ésima raíz del índice de rentabilidad (*IR*). Todos estos criterios son correctos para comparar los proyectos con vidas diferentes.

Para consolidar la metodología podemos utilizar el criterio *SNU* para comparar los proyectos *E* y *F* (ejemplo 3).

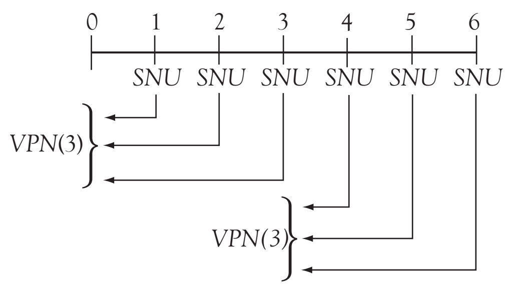


Figura 14.12

Equivalencia entre el *VPN*(3) y la *SNU*.

Datos:

$$n(E) = 2 \text{ años}, \qquad n(F) = 3 \text{ años}, \qquad k = 10\%$$
$$VPN(E) = VPN(2) = 200, \qquad VPN(F) = VPN(3) = 300$$

Solución:

Para calcular la *SNU* del proyecto *E* podemos utilizar la tabla del factor del valor presente de una anualidad con $n = 2$ y $k = 10\%$. $FVPA(2, 10\%) = 1.7355$. También podemos usar la fórmula o una calculadora financiera.

$$SNU(E) = \frac{200}{1.7355} = 115.24 \qquad y \qquad SNU(F) = \frac{300}{2.4869} = 120.63$$

Dado que la *SNU* del proyecto *F* es mayor que la del proyecto *E*, el proyecto *F* es mejor que el *E*. Este resultado coincide con el obtenido al llevar los dos proyectos a un periodo de vida común de seis años. Para comprobar que los dos procedimientos son realmente dos variantes del mismo método, hagamos el siguiente ejercicio.

¿Cuál es el valor presente de una anualidad que implica un pago de $115.24 al final de cada uno de los siguientes seis años si la tasa de interés es de 10%?

$$VPA_{k,n} = \frac{a}{k}\left(1 - \frac{1}{(1+k)^n}\right) = \frac{115.24}{0.1}\left(1 - \frac{1}{1.1^6}\right) = 501.9 = VPN_{2,3}$$

El valor presente de una anualidad que paga la *SNU* del proyecto durante seis años es el mismo que el valor presente neto del proyecto que dura dos años si éste es repetido tres veces *VPN*(2,3).

El mismo ejercicio puede ser repetido con el proyecto *F*. El valor presente de una anualidad de $120.63 durante seis años, a 10%, es igual a $525.39; exactamente lo mismo que el valor presente del proyecto *F* con vida de tres años, repetido dos veces ($VPN_{3,2}$).

En la práctica, para comparar los proyectos con vidas diferentes dividimos su *SNU* entre la tasa de interés, obteniendo así el valor presente del proyecto con vida de *n* años repetido un número infinito de veces.

$$VPN(n,\infty) = \frac{SNU}{k} = VPN(n)\frac{1}{1 - \dfrac{1}{(1+k)^n}} = VPN(n)\left[\frac{(1+k)^n}{(1+k)^n - 1}\right]$$

Donde el $VPN(n,\infty)$ es el *valor presente neto a perpetuidad* del proyecto con vida *n*.

$$\boxed{VPN(n,\infty) = VPN(n)\left[\frac{(1+k)^n}{(1+k)^n - 1}\right]}$$

El criterio de selección con el $VPN(n,\infty)$ es sencillo:

Si todo lo demás permanece constante, entre los proyectos con vidas diferentes seleccionamos aquel proyecto que tiene el $VPN(n,\infty)$ más grande.

El valor de un activo que dura para siempre es la renta que éste produce dividida entre la tasa de interés.

Si el riesgo de los proyectos es igual (en su evaluación se usa la misma tasa de descuento), el criterio del valor presente neto a perpetuidad produce el mismo resultado que el criterio de la *SNU*. La división entre k se realiza para tomar en cuenta el hecho de que los proyectos pueden representar diferentes niveles de riesgo. A menor riesgo, menor tasa de descuento y mayor valor del $VPN(n,\infty)$, con la misma *SNU*.

En el cálculo del $VPN(n,\infty)$ se utiliza la conocida regla de la perpetuidad:

$$\text{Valor} = \frac{\text{Renta}}{\text{Tasa de interés}}$$

$$VPN(n,\infty) = \frac{SNU}{k} = \frac{\text{Renta}}{\text{Tasa de interés}}$$

En esta fórmula se puede apreciar que la *SNU* es la renta anual a perpetuidad que generaría el proyecto si durara indefinidamente.

Dado que $\dfrac{(1+k)^n}{(1+k)^n - 1} = 1 + \dfrac{1}{(1+k)^n - 1}$, podemos escribir la fórmula del valor presente neto a perpetuidad del proyecto con vida n en forma alternativa:

$$VPN(n,\infty) = VPN(n) + \frac{VPN(n)}{(1+k)^n - 1}$$

El lector seguramente habrá notado que el lado derecho de la ecuación es el *valor presente capitalizado* del proyecto.[8] Con esa cantidad es posible no solamente echar a andar el proyecto, sino también repetirlo en la misma escala a perpetuidad.

$$\boxed{VPN(n,\infty) = \frac{SNU}{k} = \text{Valor presente capitalizado del proyecto}}$$

RACIONAMIENTO DEL CAPITAL

Hasta ahora hemos analizado la selección entre proyectos mutuamente excluyentes que proporcionan el mismo servicio. Algunas veces la empresa contempla varios proyectos independientes, pero el monto total que puede dedicar a la inversión está limitado. Este tipo de problema se conoce con el nombre de *racionamiento de capital*. Las empresas pueden imponer límites al monto de fondos que invertirán cada año, independientemente del mercado financiero. Entre las causas del racionamiento del capital podemos mencionar las siguientes:

[8] El concepto de “costo capitalizado” fue discutido en el capítulo 7.

- La empresa se niega a emitir acciones porque su precio es bajo, o para evitar la dilución del control de la propiedad.
- La empresa ya llegó a un límite prudente de endeudamiento y no quiere endeudarse más, o está impedida para hacerlo por los contratos de deuda existentes.
- Aun cuando no hay escasez de fondos, existen problemas de otro tipo para administrar una expansión rápida, tales como la escasez de personal calificado, la falta de experiencia o la ineficacia administrativa.

El problema de racionamiento de capital tiene las siguientes características:

1. Existen propuestas de varios proyectos independientes: la aceptación de un proyecto no excluye la aceptación de otros.
2. Cada proyecto puede ser aceptado o rechazado: no hay la posibilidad de una inversión parcial en un proyecto.
3. El presupuesto está limitado y el límite es inferior a la suma de los costos iniciales de los proyectos propuestos.

El problema de racionamiento de capital puede ser formulado como un problema de programación lineal entera: maximizar el valor de la empresa, sujeto a la restricción de no exceder el presupuesto de capital, donde cada proyecto puede ser aceptado o rechazado.

$$Max\sum_{i=1}^{m} x_i VP_i$$

$$\sum_{i} x_i I_i \leq \mathrm{B}$$

$$\text{sujeto a} \qquad x_{\mathrm{i}} = 1 \quad \text{o} \quad x_i = 0$$

donde VP_i es el valor presente neto del proyecto i,
x_i es un indicador si el proyecto i es aceptado ($x_i = 1$), o rechazado si ($x_i = 0$),
I_i es el desembolso inicial en el proyecto i,
m es el número de proyectos propuestos,
B es la restricción presupuestaria.

Para resolver este tipo de problemas necesitamos utilizar algún paquete de programación lineal. El lector podrá encontrar la descripción de programación matemática en cualquier libro de investigación de operaciones.

En la práctica se utiliza con frecuencia el método de índice de rentabilidad ponderado. El *IR* del presupuesto es la suma ponderada de los *IR* de todos los proyectos.

$$IR(\text{presupuesto}) = w_1 IR_1 + w_2 IR_2 + \cdots + w_m IR_m = \sum_{i=1}^{m} w_i IR_i, \qquad \text{tal que} \qquad \sum_{i=1}^{m} w_i = 1$$

donde IR_i es el índice de rentabilidad del proyecto i,
m es el número de proyectos aceptados,
w_i es el desembolso en el proyecto i, como fracción del presupuesto de capital.

Al aplicar este método es necesario tener presente que el índice de rentabilidad del exceso de fondos (la parte del presupuesto de capital de la empresa que no fue invertida en ningún proyecto) es igual a 1. Esto se debe a que, según nuestros supuestos, el exceso de fondos sólo puede invertirse en instrumentos que apenas rinden una tasa igual al costo de oportunidad del capital.

Dado que el índice de rentabilidad es la relación entre el valor presente de los beneficios (VPB) y el valor presente de los costos (I_0), ambos descontados por la tasa que representa el costo del capital, la relación tendrá que ser necesariamente igual a uno si los beneficios consisten en producir la tasa igual al costo del capital.

Si una inversión igual a I_0 produce un rendimiento anual igual a k, su flujo de efectivo anual es $I_0(1+k)$. El valor presente de los beneficios de esta inversión es igual a I_0.

El valor presente neto de un proyecto que produce rendimientos iguales al costo de capital es igual a cero y el índice de rentabilidad de este proyecto es igual a uno.

$$VP(\text{beneficios}) = \sum_{t=1}^{n} \frac{\text{beneficio}}{(1+k)^t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{I_0(1+k)^t}{(1+k)^t} = I_0$$

$$VPN = VP(\text{beneficios}) - \text{costo} = I_0 - I_0 = 0$$

$$\text{Índice de Rentabilidad} = \frac{VP(\text{beneficios})}{\text{Costo}} = \frac{I_0}{I_0} = 1$$

Para ilustrar el método del índice de rentabilidad ponderado consideremos la situación de una empresa que contempla cinco proyectos de inversión independientes, pero su presupuesto de capital es limitado a \$600 000. Los datos de los cinco proyectos están resumidos en el cuadro 14.5.[9]

Cuadro 14.5

Proyectos con diferente escala (n = 5 años, k = 10%)

Proyecto	I_0 (miles)	*FE* anual	*VPB*	*VPN*	*TIR* (%)	*IR*
1	\$400	121.347	460.0	60.0	15.1	1.15
2	250	74.523	282.5	32.5	14.9	1.13
3	350	102.485	388.5	38.5	14.2	1.11
4	300	85.470	324.0	24.0	13.1	1.08
5	100	23.742	90.0	– 10.0	6.0	0.90

De los cinco proyectos, los cuatro primeros son aceptables y el quinto debería ser rechazado, dado que su valor presente neto es negativo y su tasa interna de retorno es menor que el costo de oportunidad del capital. Si no fuera por el racionamiento del capital aceptaríamos los cuatro proyectos. Si el límite del presupuesto de capital es de \$600 000, ni siquiera podemos aceptar los primeros dos proyectos. La opción que se nos presenta es la siguiente:

[9] Fred Weston y Thomas Copeland, *Finanzas en Administración*, 9a. ed., México, McGraw-Hill, 1994, p. 394.

1. Aceptar el proyecto 1 e invertir el remanente de $200 000 en instrumentos que rinden el costo de capital (10%).
2. Aceptar los proyectos 2 y 3.

Ahora vamos a calcular el índice de rentabilidad de las dos alternativas, multiplicando el *IR* de cada proyecto por el porcentaje del presupuesto total asignado a él:

$$IR(1) = \frac{400}{600}(1.15) + \frac{200}{600}(1.0) = 1.1$$

Como ya explicamos, el *IR* del exceso de efectivo (200) es igual a 1.

$$IR(2) = \frac{250}{600}(1.13) + \frac{350}{600}(1.11) = 1.183$$

En vista de que el índice de rentabilidad de la segunda alternativa es mayor, deberíamos seleccionar los proyectos 2 y 3.

El lector seguramente ya notó que podríamos haber llegado a la misma conclusión sumando los valores presentes netos:

$$32.5 + 38.5 = 71 > 60 + 0 = 60$$

La técnica del índice de rentabilidad ponderado produce exactamente los mismos resultados que el *VPN*. Utilizada correctamente, la técnica del valor presente neto siempre produce resultados acertados. Si nos limitamos sólo a este método no cometeremos errores graves.

La aplicación correcta del método del valor presente neto al problema de racionamiento de capital consiste en formar paquetes de proyectos cuyo costo inicial no rebase la restricción presupuestaria. Después, se calcula el *VPN* de cada paquete aprovechando la propiedad de aditividad. Finalmente se selecciona el paquete con el mayor valor presente neto.

Cuadro 14.6

Paquetes de proyectos que no rebasan la restricción presupuestaria

Paquete	1	2 + 3	2 + 4
Costo inicial	400	600	550
Valor presente neto	60.0	71.0	56.5

De los cinco proyectos propuestos es posible formar sólo tres paquetes. Otras combinaciones rebasan la restricción presupuestaria y la inclusión del proyecto 5 sería contraproducente, porque reduciría el valor presente del paquete.

Para consolidar la comprensión de las técnicas presentadas en este texto, a continuación presentamos algunos problemas resueltos.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Una empresa contempla la posibilidad de invertir en una máquina que cuesta \$600 000 y se espera que genere flujos anuales netos de efectivo de 200 000 durante los siguientes cinco años. El costo del capital aplicable es de 16%. ¿Conviene hacer la inversión?

$$I_0 = 600\,000,\ FE_t = 200\,000,\ k = 16\%,\ n = 5.$$

Solución:

Dado que las entradas de efectivo durante la vida del proyecto son uniformes, podemos aplicar la fórmula del valor presente de la anualidad o, también, utilizar el menú *VDT* de la calculadora financiera HP–17BII.
El valor presente neto es el valor presente bruto menos el desembolso inicial.

$$VPN = VPB - I_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{FE_t}{(1+k)^t} - I_0$$

Cuando los flujos de efectivo en todos los periodos son iguales, el valor presente bruto es el valor presente de una anualidad, en la cual $R = k$ y $a = FE$.

$$VPB = \frac{FE}{k}\left(1 - \frac{1}{(1+k)^n}\right) = \frac{200\,000}{0.16}\left(1 - \frac{1}{(1.16)^5}\right) = 200\,000(3.2743) = 654\,858.73$$

El *valor presente neto* es el valor presente bruto menos el desembolso inicial:

$$VPN = 654\,858.73 - 600\,000 = 54\,858.73 > 0 \Rightarrow \text{el proyecto es aceptable.}$$

Para calcular el índice de rentabilidad, simplemente dividimos el valor presente bruto entre el desembolso inicial:

$$IR = 654\,858.73/600\,000 = 1.0914 > 1 \Rightarrow \text{el proyecto es aceptable.}$$

La *tasa de rendimiento a perpetuidad* es el IR multiplicado por la tasa de interés:

$$TRP = 1.0914(0.16) = 0.1746 = 17.46\% > k \Rightarrow \text{el proyecto es aceptable.}$$

La tasa interna de retorno se calcula buscando la tasa de descuento que iguala el valor presente neto a cero:

$$TIR = 19.86\% > k \Rightarrow \text{el proyecto es aceptable.}$$

Para calcular el rendimiento del costo de oportunidad primero tenemos que calcular el valor terminal bruto:

$$VTB = VF(VPB) = 654\,858.73(1.16)^5 = 1\,375\,427.07$$

$$(1+RCO)^5 = \frac{VTB}{I_0} = \frac{1\,375\,427.07}{600\,000} = 2.2924$$

$$RCO = 2.29240.2 - 1 = 0.1805 = 18.05\% > k \;\Rightarrow\; \text{el proyecto es aceptable.}$$

Para obtener de manera alternativa el *RCO* (el rendimiento bruto del proyecto) se emplea la fórmula que descompone el *RCO* entre el rendimiento neto y el costo de capital.

$$1 + RCO = IR^{\frac{1}{n}}\,(1+k)$$

$$1 + RCO = 1.0914^{0.2}(1.16) = 1.1805 \;\Rightarrow\; RCO = 0.1805 = 18.05\%$$

La n-ésima raíz del índice de rentabilidad la tratamos como uno más la tasa de beneficio neto. Así el rendimiento neto es:

$$\text{Rendimiento neto} = 1.0914^{0.2} - 1 = 0.0176 = 1.76\%$$

Este rendimiento es bastante modesto, por lo que el proyecto es sensible a las alzas en la tasa de interés. Si la tasa de interés subiera a 20%, por ejemplo, el proyecto dejaría de ser aceptable ($VPN = -1\,877.57$).

Es mucho más fácil hacer todos estos cálculos si se utiliza el menú VDT de la calculadora financiera HP-17BII. A continuación describiremos paso por paso el procedimiento requerido.

En el menú principal pulsamos la tecla del menú FIN y después VDT. Antes de empezar el cálculo oprimimos la tecla CLEAR DATA para no contaminar la solución con los datos del problema anterior.

Si la pantalla dice: 1 NO.P AÑO MODO FINAL (el *default* es 12 NO.P AÑO MODO FINAL), estamos listos para introducir los datos. En caso contrario, pulsamos la tecla **OTRO**, introducimos 1 en la pantalla y pulsamos la etiqueta P.AÑ y después FIN. Ahora pulsamos la tecla EXIT y ya estamos listos. "1 NO.P AÑO" significa que hay un solo flujo de efectivo (pago) en el año. "MODO FINAL" significa que dicho pago se presenta al final del periodo.

Para introducir los datos primero insertamos cada número en la pantalla y después pulsamos la tecla del menú correspondiente. Por ejemplo, cuando ya tenemos en la pantalla el número 5, pulsamos la etiqueta N. Para evitar confusión, describimos este procedimiento de la siguiente manera:

N = 5, %I = 16, VA = 0, PAGO = 200 000, VF = 0

Ahora, al pulsar la tecla VA,[10] obtenemos el *VPB* de los flujos de efectivo. VA = −654 858.73. El signo menos se debe a que el VA siempre tiene un signo opuesto al signo de los pagos. En

[10] VA o valor actual es lo mismo que el valor presente. Normalmente es el valor presente bruto.

nuestro caso podemos ignorar el signo. Al restar de esta cantidad el desembolso inicial obtenemos el valor presente neto: *VPN* = 54 858.73.

Para obtener la *TIR* introducimos en el registro VA el desembolso inicial con el signo negativo. Primero introducimos 600 000 en la pantalla, después pulsamos la tecla de cambio de signo (+/−) y finalmente pulsamos VA: VA = −600 000.

Al pulsar la etiqueta %I obtenemos el valor de la *TIR* = 19.86%. Es la tasa de interés que hace el *VPN* igual a cero. Si en el registro VA tenemos 600 000 y en el registro PAGO 200 000, la calculadora computa la tasa de interés que hace que el valor presente de los cinco pagos de 200 000 (*VPB*) sea también de 600 000. Si el *VPB* es igual al desembolso inicial, el *VPN* es necesariamente igual a cero.

Cuando los flujos de efectivo en diferentes periodos no son iguales, el procedimiento esbozado arriba no se aplica y es necesario hacer los cálculos a mano o usar el menú F.CAJ de la calculadora financiera.

Problema 2

Una empresa contempla una inversión que cuesta $250 000 y durante su vida de cinco años generará los siguientes flujos de efectivo netos (en miles):

Año	0	1	2	3	4	5
FE	− 250	50	50	80	90	100

El costo de capital es de 9%. Calcule el *VPN* y la *TIR* del proyecto.

Solución:

Primero calculamos el *VPB* al descontar los flujos de efectivo netos con el costo del capital.

$$VPB = \frac{50}{1.09} + \frac{50}{(1.09)^2} + \frac{80}{(1.09)^3} + \frac{90}{(1.09)^4} + \frac{100}{(1.09)^5} = 278\,481.64$$

$$VPN = VPB - I_0 = 278\,481.64 - 250\,000 = 28\,481.64 > 0$$

$$IR = 278\,481.64 / 250\,000 = 1.1139 > 1$$

Está claro que el proyecto es aceptable y dejamos el cálculo de otros indicadores al lector.

Al utilizar el menú F.CAJ de la calculadora financiera no sólo podemos calcular el *VPN* más rápido, sino también podemos calcular el valor de la *TIR*, sin tener que recurrir al proceso de prueba y error.

En el menú principal apretamos la etiqueta FIN y después la etiqueta F.CAJ. Antes de empezar el cálculo pulsamos la tecla CLEAR DATA para poner los registros en ceros. La calculadora pregunta: “¿Borro la lista?” Contestamos: “SÍ”. Llenamos los registros marcando un número en la pantalla y pulsando la tecla INPUT. A continuación presentamos el listado:

F.CAJ (0) = −250 000   El desembolso inicial tiene el signo negativo.
F.CAJ (1) = 50 000

NO. DE VECES (1) = 2	El mismo flujo se produce dos veces consecutivas.
F.CAJ (2) = 80 000	
NO. DE VECES (2) = 1	
F.CAJ (3) = 90 000	
NO. DE VECES (3) = 1	
F.CAJ (4) = 100 000	
NO. DE VECES (4) = 1	
F.CAJ (5) = ?	Ya terminó nuestra lista y pulsamos la tecla EXIT.

En el nuevo menú pulsamos la tecla CALC y esperamos unos segundos. Introducimos la tasa de interés de 9%: $I\% = 9$.

Ahora tenemos la solución del problema:

$$VAN = 28\,481.64 \text{ (es el } VPN\text{)}, \qquad TIR = 12.76\%$$

La principal ventaja de utilizar el menú F.CAJ de la calculadora es la posibilidad de calcular rápidamente los valores presentes netos para diferentes tasas de interés. Lo único que hay que hacer es introducir un nuevo valor de la tasa de interés y pulsar la etiqueta VAN.[11] Invitamos al lector a que compruebe los resultados presentados en la siguiente tabla:

I%	5	7	9	11	12.7587	15
VAN	64 437.37	45 663.93	28 481.65	12 752.40	0.00	− 14 937.79

Respuesta: El proyecto es viable si el costo de capital es menor a 12.76%.

Problema 3

Una empresa contempla dos proyectos mutuamente excluyentes: G y *H*. Sus flujos de efectivo netos vienen en la siguiente tabla:

Periodo	0	1	2	3	4	5
FE(G)	− 120	70	40	30	10	10
FE(H)	− 120	10	20	30	50	80

Los proyectos parecen similares, pero en el proyecto G los flujos de efectivo se concentran al inicio del proyecto, mientras que en el proyecto *H* los flujos de efectivo fuertes se producen en los últimos años de la vida del proyecto.

a) Calcule el *VPN* de los dos proyectos para diferentes valores del costo del capital.

b) Calcule la *TIR* de cada proyecto.

[11] VAN o valor actual neto es lo mismo que el *VPN* (valor presente neto).

c) Grafique los perfiles del *VPN* de los dos proyectos.

d) Seleccione el mejor proyecto para $k = 6\%$, $k = 9\%$ y $k = 15\%$.

Solución:

a) Podemos utilizar la hoja de cálculo Excel o la calculadora financiera HP-17BII. A continuación presentamos la hoja de cálculo en la cual utilizamos la función VNA de Excel.

R	VPN(G)	VPN(H)
0%	40.00	70.00
3%	30.63	49.45
6%	22.22	31.81
9%	14.64	16.59
12%	7.77	3.40
15%	1.53	−8.09
18%	−4.16	−18.14
21%	−9.37	−26.97
24%	−14.16	−34.76
27%	−18.57	−41.65
30%	−22.64	−47.77
TIR=	**15.78%**	**12.84%**

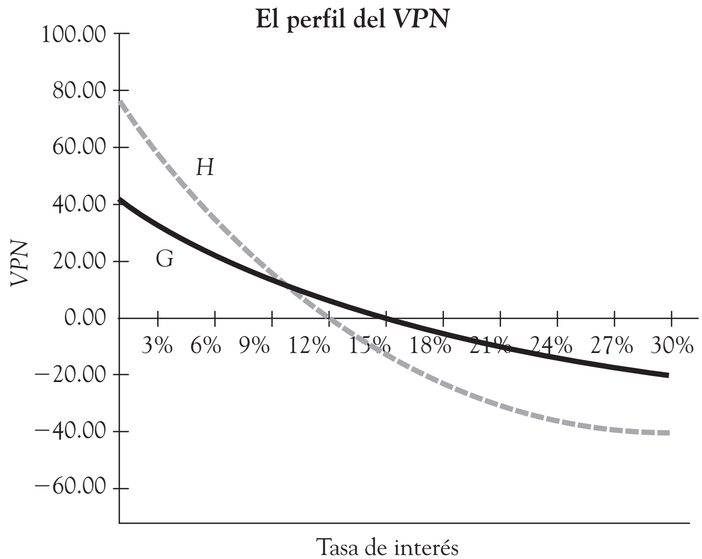
Con la calculadora financiera repetimos el procedimiento esbozado en el problema 2. A continuación presentaremos las acciones necesarias para calcular el *VPN* y la *TIR* del proyecto G.

En el menú principal apretamos la tecla FIN, F.CAJ y CLEAR DATA. Contestamos “SÍ” a la pregunta: ¿Borro la lista? El listado es el siguiente:

F.CAJ(0) = – 120	El desembolso inicial tiene el signo negativo.
F.CAJ(1) = 70	
NO. DE VECES(1) = 1	Simplemente pulsamos la tecla INPUT.
F.CAJ(2) = 40	
NO. DE VECES(2) = 1	
F.CAJ(3) = 30	
NO. DE VECES(3) = 1	
F.CAJ(4) = 10	
NO. DE VECES(4) = 2	El flujo 4 se repite dos veces.
F.CAJ(5) = ?	Ya terminó nuestra lista y pulsamos la tecla EXIT.

Oprimimos la tecla CALC y al pulsar la tecla %*TIR* la respuesta: $TIR = 15.78\%$. Ahora introducimos los diferentes niveles de la tasa de interés y pulsamos la etiqueta *VAN* para obtener el valor presente neto para cada tasa. Para $I\% = 9$, por ejemplo, $VAN = 14.64$. Para obtener una tabla semejante a la de Excel tenemos que repetir este procedimiento 11 veces. Además tendríamos que repetir todo esto para el proyecto *H*. Aun cuando la calculadora financiera nos puede ahorrar mucho tiempo en problemas pequeños, no se compara con el poder de una hoja de cálculo.

b) La gráfica de la tabla presentada con anterioridad es la siguiente:



La línea gruesa representa el perfil del proyecto G, mientras que la línea punteada representa el perfil del proyecto *H*. Dado que en el proyecto *H* los flujos de efectivo se concentran en los dos últimos años de vida del proyecto, este proyecto es mejor para tasas de interés bajas. Para una tasa de interés cercana a 10% los dos proyectos son iguales, y para tasas mayores el proyecto G tiene un mayor *VPN*. El proyecto G deja de ser rentable para tasas de interés mayores a 15.78% (la *TIR* del proyecto), y el proyecto *H* para tasas mayores a 12.8%.

La *TIR* puede determinarse de manera gráfica como el punto en el que la línea del *VPN* intersecta el eje horizontal.

c) Si hubiera una abundancia relativa de capital, seleccionaríamos el proyecto *H*, porque tiene el *VPN* mayor que el proyecto G. En condiciones de escasez de capital (k = 15%), seleccionaríamos el proyecto G, que con esta tasa todavía tiene el *VPN* > 0.

Para comparar proyectos con vidas diferentes tenemos que calcular su valor presente neto a perpetuidad ($VPN_{n,\infty}$), conocido también como costo capitalizado, o su serie neta uniforme (*SNU*).

Problema 4

Una empresa estudia la posibilidad de llevar a cabo uno de tres proyectos mutuamente excluyentes. Los tres proyectos representan el mismo riesgo, pero tienen vidas diferentes. ¿Cuál proyecto debería seleccionar la empresa si su costo de capital es de 14%?

	Proyecto 1	**Proyecto 2**	**Proyecto 3**
Costo	30 000	30 000	30 000
FE anual	12 000	9 500	8 000
Vida en años	4	6	8

Dado que los flujos de efectivo anuales son uniformes, podemos utilizar el menú *VDT* de la calculadora financiera para calcular los valores presentes, las *TIR*, las *SNU* y los $VPN_{n,\infty}$ de los tres proyectos. Los resultados son los siguientes:

	Proyecto 1	**Proyecto 2**	**Proyecto 3**
VPN	4 964.55	6 942.34	7 110.91
TIR (%)	21.86	22.12	20.78
SNU	1 703.86	1 785.26	1 532.89
VPN (n,∞)	12 170.46	12 751.96	10 949.28

Explicaremos el procedimiento de cálculo sólo para el proyecto 1. Los cómputos para los demás proyectos los debe hacer el lector.

En el menú principal primero pulsamos FIN, VDT y finalmente CLEAR DATA.

La pantalla debe decir: 1 NO.P AÑO MODO FINAL. Si no, hacemos los ajustes necesarios en el submenú OTRO de la manera descrita anteriormente.

Ahora introducimos los siguientes datos:

$$N = 4,\ \%I = 14,\ PAGO = 12\ 000,\ VF = 0$$

Al pulsar la tecla VA, obtenemos el *VPB* de los flujos de efectivo. VA = – 34 964.55. Ignoramos el signo menos. Al restar de esta cantidad el desembolso inicial obtenemos el valor presente neto: *VPN* = 4 964.55.

Para obtener la *TIR* introducimos en el registro VA el desembolso inicial con el signo negativo: VA = – 30 000.

Al pulsar la tecla %I obtenemos el valor de la *TIR* = 21.86% que es la tasa de descuento que iguala el valor presente de los flujos de efectivo con el desembolso inicial.

Para calcular la *SNU*, en el registro VA introducimos el valor presente neto = 4 964.55 y, al pulsar la tecla PAGO, obtenemos la respuesta: *SNU* = 1 703.86.

Aplicamos el mismo procedimiento en los demás proyectos.

La *SNU* es el pago anual equivalente al valor presente neto del proyecto. Para los proyectos con el mismo desembolso inicial, a mayor *SNU*, mejor es el proyecto. En caso de proyectos con costos diferentes, podemos calcular el valor de la *SNU* por un peso de desembolso inicial.

Para calcular el valor presente neto a perpetuidad (el costo capitalizado) tenemos dos alternativas:

1. Dividir la *SNU* de cada proyecto por la tasa de interés. Para el primer proyecto tenemos:

$$VPN(n,\infty) = \frac{SNU}{k} = \frac{1\,703.86}{0.14} = 12\,170.46$$

2. Utilizar la fórmula:

$$VPN(n,\infty) = VPN(n)\left[\frac{(1+k)^n}{(1+k)^n - 1}\right] = 4964.55\ \frac{1.14^4}{1.14^4 - 1} = 12\ 170.46$$

Obviamente el resultado obtenido con los dos métodos debe ser el mismo.

Al observar la tabla de los resultados notamos de inmediato que, de los tres proyectos, el mejor es el 2 y éste debería ser aceptado. En este caso la *TIR* produce un resultado correcto. En cambio, el criterio del *VPN*, sin el ajuste por la vida del proyecto, produciría una decisión errónea. El proyecto 3 tiene el mayor *VPN*, pero esto se debe a que dura más tiempo.

El proyecto 2 tiene un flujo de efectivo menor que el proyecto 1, pero esto es recompensado por el hecho de que su costo inicial se prorratea en seis años (costo anual de $5 000), mientras que el mismo costo para el primer proyecto tiene que prorratearse en cuatro años (costo anual de $7 500).

Finalmente, consideraremos el caso de proyectos con vidas diferentes y con flujos de efectivo desiguales.

Problema 5

Si el costo de capital es de 17%, ¿cuál de los tres proyectos mutuamente excluyentes debe ser aceptado?

Año	Proyecto *A*	Proyecto *B*	Proyecto C
0	−80 000	−80 000	−80 000
1	55 000	25 000	10 000
2	50 000	25 000	25 000
3		60 000	40 000
5			45 000

Dado que los flujos de efectivo no son uniformes, necesitamos recurrir al menú F.CAJ de la calculadora financiera para calcular los valores presentes, las *TIR* y las *SNU* de los tres proyectos. Los resultados son los siguientes:

	Proyecto *A*	Proyecto *B*	Proyecto C
VPN	3 534.22	−2 907.40	4 290.11
TIR (%)	20.58	15.06	18.86
SNU	2 229.49	−1 315.82	1 340.93

Como puede verse en la tabla, el mejor proyecto es el *A*, ya que tiene la mayor *SNU*. Además, tiene la mayor *TIR*. El proyecto *B* es inaceptable desde cualquier punto de vista. Su *VPN* es negativo, su *TIR* es menor que el costo de capital y su *SNU* es negativo. El proyecto C tiene el mayor *VPN* de los tres, pero su *TIR* y su *SNU* son menores que en el proyecto *A*.
Respuesta: La empresa debe seleccionar el proyecto *A*.

Explicaremos el procedimiento de solución en la calculadora financiera solamente para el proyecto C.

En el menú principal pulsamos las teclas FIN, F.CAJ y CLEAR DATA. Contestamos "sí" a la pregunta: "¿Borro la lista?" El llenado de la lista debe ser el siguiente:

F.CAJ (0) = −80 000	El desembolso inicial tiene el signo negativo.
F.CAJ (1) = 10 000	
NO. DE VECES (1) = 1	El mismo flujo se produce dos veces consecutivas.
F.CAJ (2) = 25 000	
NO. DE VECES (2) = 2	El mismo flujo se produce dos veces.
F.CAJ (3) = 40 000	
NO. DE VECES (3) = 1	
F.CAJ (4) = 45 000	
NO. DE VECES (4) = 1	
F.CAJ (5) = ?	Ya terminó nuestra lista y pulsamos la tecla EXIT.

En el nuevo menú pulsamos la tecla CALC y después introducimos la tasa de interés: I% = 17. Ahora tenemos la solución del problema:

$$VAN = 4\ 290.11, \qquad TIR = 18.86\%, \qquad SNU = 1\ 340.93$$

Cuando el costo inicial de las diferentes propuestas de inversión no es igual y la vida de cada proyecto es diferente, hay que ser muy cuidadoso en el uso de los indicadores porcentuales. El criterio fundamental debería ser la contribución del proyecto al valor de la empresa (al patrimonio de los accionistas). El valor presente neto a perpetuidad cumple con este criterio de forma cabal.

Problema 6

¿Cuál de los siguientes proyectos mutuamente excluyentes debería seleccionarse si el costo de capital es de 15% y no hay racionamiento de capital?

Año	Proyecto *E*	Proyecto *F*	Proyecto *G*
0	−500	−1 000	−600
1	550	750	1 100
2	550	750	
3		750	

Solución:

En la tabla que sigue presentamos los principales indicadores para los tres proyectos:

	Proyecto *E*	Proyecto *F*	Proyecto *G*
VPN	394.14	712.42	356.52
$VPN(n,\infty)$	1 616.28	2 080.16	2 733.33
SNU	242.44	312.02	410.00
IR	1.78	1.71	1.59
TIR(%)	73.42	54.77	83.33

Se ve claramente que el mejor proyecto es el G, seguido por el *F*, y el peor es el *E*. Sin embargo, el índice de rentabilidad por sí mismo establecería un orden inverso. La *TIR*, en cambio, seleccionaría correctamente el mejor proyecto, el G, pero fallaría en establecer el orden correcto entre los proyectos *E* y *F*. Así queda otra vez establecido que el mejor criterio para la selección de proyectos es el valor presente neto, ajustado en caso de necesidad por las diferencias en las vidas de los proyectos. La *SNU* tiene las mismas ventajas que el *VPN* a perpetuidad.

La *TIR* tiene sus peculiaridades que la descalifican como un criterio definitivo y la relación beneficio/costo (índice de rentabilidad) debería ser ajustada por la vida de cada proyecto.

El índice de rentabilidad no es confiable porque no toma en cuenta las diferencias en escala y en vida de los proyectos. Si sacamos *n*-ésimas raíces de los índices de rentabilidad (*n* es la vida del proyecto) obtendremos el rendimiento neto de cada proyecto que toma en cuenta las diferencias en las vidas, pero seguiremos ignorando las diferencias en escala.

E: $\sqrt[2]{IR(E)} = \sqrt{1.78} = 1.3373,$ F: $\sqrt[3]{IR(F)} = \sqrt[3]{1.71} = 1.1958,$

G: $\sqrt[1]{IR(G)} = IR(G) = 1.5942$

Según este criterio, el mejor proyecto es el G, pero en segundo lugar está el *E*, que en realidad contribuye menos al valor de la empresa que el *F*. Esto se debe a que, aun cuando el proyecto *E* es más rentable, es sólo la mitad del *F* y por eso su contribución al valor de la empresa es menor.

Ahora modificaremos un poco los datos del problema 6 para ilustrar el problema de racionamiento del capital.

Problema 7

La empresa tiene tres propuestas de proyectos independientes, pero, por cuestiones de estrategia financiera la dirección ha impuesto un tope a la inversión igual a $1 000. El costo del capital es de 15%. ¿Qué proyectos debería seleccionar la empresa?

Año	Proyecto *I*	Proyecto *J*	Proyecto *K*
0	−500	−1 000	−500
1	550	750	800
2	550	750	
3		750	

Solución:

Al observar los datos del problema llegamos a la conclusión de que la única alternativa disponible para la empresa es seleccionar los proyectos *I* y *K*, o el *J*. En la siguiente tabla presentamos los principales indicadores para los tres proyectos:

	Proyecto *I*	**Proyecto *J***	**Proyecto *K***
VPN	394.14	712.42	195.65
VPN(*n*,∞)	1 616.28	2 080.16	1 500.00
SNU	242.44	312.02	225.00
IR	1.78	1.71	1.39
TIR (%)	73.42	54.77	60.00

El criterio correcto de selección es el *VPN*(n,∞), o la *SNU*, la cual proporciona la misma información. Según este criterio, la empresa debe seleccionar los proyectos *I* y *K*, ya que la suma de sus valores presentes netos a perpetuidad es igual a \$3 116.28 > 2 080.16 del proyecto *J*.

Sin embargo, si dependiéramos del promedio ponderado del índice de rentabilidad seleccionaríamos, incorrectamente, el proyecto *J*.

$$IR(\mathrm{I} + \mathrm{K}) = 0.5(1.78) + 0.5(1.39) = 1.58 < IR(\mathrm{J}) = 1.71$$

Esta anomalía se debe a que, como ya explicamos varias veces, el índice de rentabilidad no toma en cuenta la vida de los proyectos.

Otra vez queda establecido que el único criterio totalmente confiable es el valor presente neto.

FÓRMULAS DEL CAPÍTULO

Tasa contable de rendimiento $TCR = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} FE_t}{I_0}$	Valor presente bruto $VPB = \sum_{t=1}^{n} \dfrac{FE_t}{(1+k)^t}$
Valor presente neto $VPN = -I_0 + \sum_{t=1}^{n} \dfrac{FE_t}{(1+k)^t}$	Valor terminal neto $VTN = -I_0(1+k)^n + \sum_{t=1}^{n} FE_t(1+k)^{n-t}$
Rendimiento del costo de oportunidad $RCO = \left(\dfrac{VTB}{I_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$	Tasa interna de retorno modificada $\dfrac{VF(\text{flujos de entrada})}{VP(\text{flujos de salida})} = (1 + TIRM)^n$
Índice de rentabilidad $IR = \dfrac{VPB}{I_0}$	Equivalencia *RCO* e *IR* $1 + RCO = IR^{\frac{1}{n}}\,(1+k)$
Tasa de rendimiento a perpetuidad $TRP = IR \cdot k$	Valor presente capitalizado $VPN(n,\infty) = \dfrac{SNU}{k}$

Términos clave

Activos físicos
Costo de capital promedio ponderado
Efectos intangibles
Índice de rentabilidad
Inflación neutral
Jerarquización de proyectos
Periodo de recuperación
Presupuesto de capital
Principio de aditividad del valor
Proyectos mutuamente excluyentes
Racionamiento de capital
Rendimiento atractivo mínimo (MARR)
Rendimiento del costo de oportunidad
Serie anual uniforme
Supuesto de reinversión de los flujos
Tasa contable de rendimiento
Tasa de rendimiento a perpetuidad
Tasa interna de retorno
Tasa interna de retorno modificada
Valor presente neto

Bibliografía

1. García González, Enrique, *Matemáticas financieras*, México, McGraw-Hill, 1998.
2. Bodie, Zvie y otros, *Investments*, 6a. ed., Irwin, McGraw-Hill, 2005.
3. Weston, Fred y Thomas Copeland, *Finanzas en administración*, vol. 1, 9a. ed., México, McGraw-Hill, 1995.
4. Grinblatt, Mark y Sheridan Titman, *Financial Markets and Corporate Strategy*, 2a. ed., Irwin, McGraw-Hill, 2002.
5. Ross, Stephen A. y otros, *Corporate Finance*, 7a. ed., Irwin, McGraw-Hill, 2005.
6. Peterson, Pamela y Frank Fabozzi, *Capital Budgeting: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, 2002.
7. Blank, Leland y Anthony Tarquin, *Engineering Economy*, 6a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 2005.
8. Seitz, Neil y Mitch Ellison, *Capital Budgeting and Long-Term Financing Decisions*, 3a. ed., Nueva York, Harcourt Brace College Publishers, 1999.

Glosario

Abono a capital (*amortización*) Diferencia entre el pago periódico y los intereses del periodo.

Acción común Título que representa la propiedad sobre una de las partes iguales en que se divide el capital social de una empresa constituida como sociedad anónima.

Acreedor (*inversionista*, *prestamista*) Es la unidad con un exceso de fondos que presta estos fondos a las unidades que los necesitan. Es el comprador de un instrumento financiero, quien recibe el rendimiento producido por éste.

Activo Algo que tiene valor de cambio. Conjunto de bienes y derechos de propiedad.

Activo financiero Activo que representa derechos de propiedad sobre algunos activos tangibles. Se expresa en términos monetarios y normalmente produce algún rendimiento. Sinónimos: instrumentos financieros, títulos, valores.

Activo tangible (físico) Activo que tiene valor intrínseco. Algunos ejemplos: edificios, máquinas, equipos, inventarios.

Amortizar Reducir la deuda mediante una serie de pagos.

Antilogaritmos Si $y = \log x$, x es el antilogaritmo de y: $x = e^y$.

Anualidad anticipada Anualidad en la que los pagos se presentan al principio de cada periodo.

Anualidad diferida Anualidad en la que el primer pago se produce con retraso respecto a la anualidad ordinaria.

Anualidad general (*compleja*) Anualidad en la que el periodo de pago es diferente del periodo de capitalización.

Anualidad ordinaria (*vencida*) Anualidad en la que los pagos se presentan al final de cada periodo. Opuesto a **anualidad anticipada.**

Anualidad simple Un conjunto de pagos periódicos, cuando el periodo de pago coincide con el periodo de capitalización de intereses. Opuesto a **anualidad general**.

Anualidad vencida Véase: *anualidad ordinaria*.

Anualización de la inflación mensual El uso del crecimiento exponencial para expresar la inflación mensual en escala anual.

Anualización efectiva Método para expresar el rendimiento de un instrumento financiero en escala anual, tomando en cuenta la frecuencia de capitalización.
Anualización nominal Método para expresar el rendimiento de un instrumento financiero en escala anual, sin tomar en cuenta la frecuencia de capitalización.
Arbitraje Una estrategia que genera utilidades sin riesgo y sin el uso de capital propio.

B

Bono cupón cero (bono de descuento puro) Instrumento de deuda con el valor nominal liquidable al vencimiento, cuyo rendimiento se deriva del descuento. No paga intereses en forma de cupones.
Bono redimible Véase *redención anticipada*
Bursatilidad Facilidad de comprar y vender un valor cotizado en la Bolsa de Valores.
Bursatilización de un activo Técnica financiera que consiste en convertir activos no negociables en activos negociables.

C

Cálculos en términos reales Cómputos en precios constantes. Cálculos en unidades de cuenta de poder adquisitivo constante.
Capitalización continua El cálculo del valor futuro al tomar como base la función exponencial natural.
Capitalización de intereses Los intereses no pagados se suman al principal y son la base para el cálculo de intereses en el periodo siguiente.
Cartera vencida Activos de un banco que no producen los flujos de efectivo esperados por el retraso de pagos o por la insolvencia del deudor.
Cetes (Certificados de la Tesorería de la Federación) Instrumentos de deuda del Gobierno Federal en México. La tasa de interés de los Cetes a 28 días es la tasa líder en el mercado de dinero. Es la **tasa libre de riesgo**, la tasa a que la población le presta dinero al Gobierno.
Cobro de intereses por adelantado Un método de calcular el interés con base en el valor final. El valor de la transacción se expresa como el valor final y lo que se entrega es dicho valor menos los intereses. Conocido también como *descuento bancario*.
Coeficiente de retención de utilidades El porcentaje de las utilidades por acción que la empresa reinvierte para poder crecer. También conocido con el nombre de *tasa de reinversión*.
Convención del fin del periodo Si la especificación del problema no dice otra cosa, se supone que todos los flujos de efectivo se producen al final de cada *periodo de interés*.
Convergencia del precio del bono hacia su valor nominal Independientemente de si el bono se vende con descuento o con prima, en la medida en que se acerca el vencimiento su precio se acerca a su valor nominal.
Convexidad del precio del bono con respecto a la tasa de interés Si al partir de algún nivel de la tasa de interés ésta sube, la reducción del precio del bono es menor que el aumento del precio del bono que resulta de una reducción de la tasa de interés de la misma magnitud.
Costo capitalizado En caso de un equipo, es su valor inicial más el valor presente de los reemplazos futuros.
Costo de capital La tasa de interés utilizada para llevar los flujos de efectivo de un proyecto hacia el presente. Puede ser el promedio de costos de diferentes fuentes de financiamiento de la empresa, o el *costo de oportunidad de capital*.

Costo de capital promedio ponderado (*WACC*) Costo de capital de la empresa en el cual el costo de cada fuente de financiamiento es ponderado por la participación de esta fuente en el valor de mercado de la empresa.
Costo de oportunidad de capital El rendimiento que podrían producir los fondos invertidos en un proyecto si fuesen invertidos en otro proyecto de igual riesgo.
Costo del capital contable El costo de capital que la empresa consigue mediante la emisión de nuevas acciones.
Costo Porcentual Promedio (*CPP*) En México, el costo promedio ponderado de captación de recursos de la banca nacional. Puede ser usado como tasa base en contratos a largo plazo.
Costos de transacción Desembolsos necesarios para llevar a cabo una transacción. Incluyen: diferencial entre el precio de compra y de venta, comisiones, costo de transferencia de fondos, costo de oportunidad de las garantías, costos de información, etc. Se calculan como un porcentaje de la transacción por **vuelta completa**.
Crecimiento El proceso que hace que el valor futuro del dinero sea mayor que el valor presente.
Crecimiento exponencial continuo Crecimiento exponencial basado en la función exponencial natural (con base *e*).
Crecimiento exponencial discreto Un patrón de crecimiento, según el cual la variable dependiente cambia su valor una vez en el periodo.
Cupón Pago periódico que ofrece un instrumento de deuda que generalmente cubre el interés generado durante el periodo de cupón.
Curva de rendimiento La relación entre el rendimiento y el plazo de los instrumentos de deuda. Véase: *estructura a plazos de las tasas de interés*

D

Depreciación económica La parte de la inversión total dedicada a prevenir el deterioro del capital físico de la empresa. Es el costo de reparación y reposición de los elementos de capital.
Derecho al cupón Cuando el bono se vende entre fechas de cupón, es la parte del cupón que corresponde al tenedor del bono.
Derechos del deudor Suma de amortizaciones, o la diferencia entre el principal y el saldo insoluto.
Descuento Diferencia entre el valor nominal del bono y su precio de mercado.
Descuento bancario Véase: *cobro de intereses por adelantado.*
Descuento compuesto Método para calcular el valor presente, a partir del valor futuro, utilizando la fórmula de interés compuesto.
Descuento continuo Uso de la función exponencial natural para calcular el valor presente, partiendo del valor futuro.
Descuento racional Un método para calcular el valor *presente que utiliza la fórmula del interés simple.* Sinónimos: descuento simple, real o justo.
Deudor (*emisor, prestatario*) Es la unidad con un déficit de fondos que solicita los fondos en préstamo para financiar alguna actividad productiva. Es el vendedor de un instrumento financiero que paga el costo de capital.
Deudor sujeto de crédito El prestatario cuyos ingresos corrientes son suficientes para cubrir el servicio de la deuda (intereses más amortización). **No es** el sujeto que posee garantías con el valor igual al monto de la deuda.
Diagrama de tiempo y valor (línea de tiempo) Es un diagrama que presenta todos los flujos de efectivo como flechas. Incluye el monto de cada flujo y la fecha en que se produce. Si un flujo presenta una entrada de efectivo, la flecha apunta hacia arriba. Si se trata de una salida de efectivo, la flecha apunta hacia abajo.

Diferencia común En una progresión aritmética es la diferencia entre un término y el término anterior.

Dividendos Parte de las utilidades netas que una empresa constituida como sociedad anónima distribuye entre los accionistas.

E

Ecuación Una proposición que expresa la igualdad de dos expresiones algebraicas.

Ecuación de valores equivalentes Relación de equivalencia entre varios flujos de efectivo que se producen en diferentes momentos.

Elasticidad de precio del bono con respecto a la tasa de interés Cambio porcentual en el precio del bono en consecuencia de un cambio de 1% en la tasa de interés.

En términos reales A precios constantes. Sin el efecto de la inflación.

Estructura a plazos de las tasas de interés (*curva de rendimiento*) Relación entre los rendimientos y los plazos de instrumentos con otras características semejantes.

F

Fecha focal En ecuaciones de valores equivalentes es el punto de tiempo al cual se llevan todos los flujos de efectivo del problema. En problemas que utilizan el interés compuesto, el resultado no depende de la fecha focal. Con el interés simple, cada fecha focal produce diferente resultado.

Flujo continuo Situación en la que el flujo de efectivo no se produce al final del periodo, sino que está uniformemente distribuido durante todo el periodo.

Flujo continuo creciente Flujo continuo que crece a una tasa de crecimiento fija.

Flujo equivalente En caso de proyectos con vidas diferentes, el flujo equivalente es el pago anual correspondiente al valor presente.

Flujos de efectivo descontados Es un método fundamental en la valoración de activos. Consiste en sumar los valores presentes de todos los flujos de efectivo que producirá un activo durante su vida.

Fondo con retiros periódicos Fondo del cual se retiran periódicamente pagos cuyo valor es diferente (mayor o menor) de los intereses que genera el fondo.

Fondo de amortización Fondo que crece en consecuencia de la capitalización de intereses que gana el saldo y las aportaciones periódicas adicionales.

Frecuencia de conversión (frecuencia de capitalización) El número de veces en el año en que se calcula el interés. La frecuencia de conversión determina la tasa efectiva.

Función exponencial Expresión en la cual la variable independiente está en el exponente.

Función exponencial natural Función exponencial con base *e*.

G

Ganancia de capital Diferencia entre el precio de venta y de compra de un activo.

Gradiente aritmético Anualidad en la cual cada pago es mayor que el pago anterior en una cantidad fija, llamada el gradiente. El gradiente también es conocido como la diferencia común de una serie aritmética.

Gradiente geométrico Anualidad cuyos pagos forman una progresión geométrica. Cada pago es el pago anterior multiplicado por una razón común, llamada el gradiente geométrico.

H

Hipoteca canadiense Crédito hipotecario que exige pagos mensuales pero usa la capitalización semestral.

Hipoteca comprada con descuento Inversión que consiste en comprar el derecho a los pagos que se derivan de un crédito hipotecario pagando un precio inferior que el valor presente de dichos pagos.

I

Ilusión monetaria Incapacidad de apreciar correctamente la reducción en el tiempo del poder adquisitivo de una moneda.

Índice de precios y cotizaciones (*IPC*) Un promedio ponderado de los precios de las acciones de las empresas emisoras que se consideran representativas del mercado en general.

Índice de rentabilidad El *valor presente bruto* dividido entre el costo del proyecto.

Indización (*indexación*) Cláusula en contratos financieros que prevé un ajuste periódico de los valores de las variables de acuerdo con los índices de la inflación. Ejemplo: los salarios son indizados, si el contrato laboral prevé su ajuste periódico y automático al alza en el mismo porcentaje que la inflación.

Inflación neutral Situación en la cual los precios de todos los bienes y servicios crecen en la misma proporción.

Interés El pago por el uso de capital. La diferencia entre el valor terminal (monto) y el valor inicial (principal).

Interés por anticipado (descuento bancario) Véase: *cobro de intereses por adelantado.*

Interpolación La búsqueda de un valor intermedio con base en la regla de tres.

Inversión neta La parte de la inversión total que incrementa la capacidad instalada de la empresa. Es la inversión total menos la depreciación económica.

J

Jararquización de proyectos (*ranking*) Asignación de rangos a los proyectos mutuamente excluyentes, empezando con el mejor y terminando con el peor.

L

Ley del precio único Los activos semejantes deben tener el mismo precio en todos los mercados.

Leyes de exponentes Reglas algebraicas que indican cómo tratar las operaciones con variables elevadas a diferentes potencias.

Liquidez Facilidad de venta de los activos a un precio predecible.

Logaritmos comunes Logaritmos con base 10.

Logaritmos naturales Logaritmos con base *e*.

M

Matemáticas financieras Métodos matemáticos que se usan en el análisis financiero. El problema central de las matemáticas financieras es el *valor del dinero en el tiempo*.

Mercado de capital Una parte del mercado de valores donde se negocian instrumentos de deuda a largo plazo y acciones de las empresas.

Mercado de dinero Una parte del mercado de valores donde se negocian instrumentos de deuda a corto plazo (menos de un año).

Mercado de valores Un conjunto de instituciones, leyes, reglamentos y costumbres que permiten comprar y vender activos financieros.

Mercado eficiente El mercado es eficiente en el sentido económico si los precios reflejan toda la información pertinente.

Mercado primario Mercado donde los títulos se venden por primera vez. Mediante la colocación primaria el emisor recibe los fondos que necesita para financiar sus actividades.

Mercado secundario Mercado donde los inversionistas compran y venden títulos, sin que esto afecte al emisor. El mercado secundario no proporciona una fuente de financiamiento para las empresas, pero sirve para aumentar la liquidez de los instrumentos financieros y encontrar su justo valor.

Método de puntos finales (*promedio geométrico*) Método para calcular la tasa promedio de crecimiento con base en el valor inicial y final.

Modelo de dividendos descontados Un modelo de valuación que consiste en sumar el valor presente de todos los dividendos esperados en el futuro, utilizando como tasa de descuento la tasa de capitalización de mercado.

Modelo de valuación Algún método de estimar el valor fundamental de un activo independiente de su precio de mercado.

Modelo de valuación de activos de capital (*CAPM*) Un modelo que permite calcular la prima de riesgo para un activo particular.

Multiplicación del capital Ejercicios que consisten en calcular el periodo de multiplicación de capital, dada la tasa de crecimiento; o la tasa de crecimiento necesaria para multiplicar el capital en un periodo específico.

Múltiplo precio/utilidad (*P/E*) El precio actual de acción de la empresa dividido entre las utilidades por acción de los últimos 12 meses. También: razón precio/utilidad.

O

Obligación Título de crédito que confiere al tenedor el derecho de percibir un interés anual fijo, además del reintegro de la suma prestada en una fecha convenida. Algunos autores distinguen entre bonos que son obligaciones del Gobierno y obligaciones que son emitidas por empresas particulares. Para los fines de este libro, los pagarés, las obligaciones y los bonos se consideran como sinónimos.

Obligación fiduciaria Obligación respaldada por un fideicomiso.

Obligación quirografaria Obligación sin una garantía específica. Su valor se deriva de la buena reputación del emisor.

Oferta competitiva Un método para participar en la subasta de bonos que consiste en hacer una oferta por escrito que especifica la cantidad y el precio de los bonos que se desean adquirir.

Oferta no competitiva Orden incondicional de comprar bonos a un precio que es el promedio de las ofertas competitivas que tuvieron éxito. Es análoga a *orden a mercado* en el caso de las acciones.

Oportunidades de crecimiento La diferencia entre el valor de la empresa con el crecimiento y su valor sin el crecimiento.

Orden a mercado Orden de compra de acciones a precios vigentes en el piso de remates en el momento de compra.

P

Pago base En una anualidad de pagos crecientes es el primer pago.
Pago periódico En una anualidad es la cantidad que se paga o recibe periódicamente.
Pago periódico equivalente Pago que permite convertir una anualidad general en una anualidad simple.
Patrón de rendimientos crecientes Pendiente positiva de la curva de rendimiento. A mayor plazo, mayor rendimiento.
Periodo de interés Periodo para el cual se especifica la tasa de interés. Si la tasa es anual el periodo de interés es un año. Si la tasa es mensual, el periodo de interés es un mes.
Periodo de recuperación (*payback*) El número de años necesarios para recuperar el costo inicial del proyecto.
Plazo En una anualidad es el número de años que dura la anualidad. El plazo también puede expresarse como el número de pagos. Es equivalente decir: una anualidad de 20 años con pagos mensuales, o una anualidad de 240 pagos mensuales.
Poder del interés compuesto Ejemplos numéricos que ilustran los efectos sorprendentes del crecimiento exponencial.
Precio limpio Precio del bono sin el derecho al cupón.
Precio neto (*precio sucio*) Suma del precio bruto y el derecho al cupón.
Préstamo amortizable Préstamo del servicio, el cual incluye tanto el interés sobre el saldo insoluto como el abono a cuenta de capital (amortización).
Presupuesto de capital Planeación y administración de los gastos en activos físicos con una vida mayor de un año.
Prima Diferencia entre el precio de mercado del bono y su valor nominal. La prima es lo opuesto al *descuento*.
Prima de liquidez Es la parte de la sobretasa que no se debe al riesgo de crédito, sino a la baja liquidez de un instrumento.
Prima de riesgo Es la sobretasa (*spread*) que paga un instrumento riesgoso por arriba de la tasa libre de riesgo. Es la diferencia entre el rendimiento requerido y la tasa libre de riesgo. Para un inversionista es la recompensa por haber invertido en activos riesgosos.
Primer pago irregular Anualidad en la cual el primer pago se produce en el momento diferente que el fin del primer periodo, o cuyo monto es distinto del monto de otros pagos.
Principal Capital inicial, valor presente.
Principio de aditividad del valor Un método de evaluación de proyectos cumple con este principio si permite evaluar los proyectos por separado, con base en sus propios méritos.
Progresión aritmética Es una sucesión en la cual cada término es la suma del término anterior y la diferencia común.
Progresión geométrica Es una sucesión en la cual cada término es el producto del término anterior y la razón común.
Progresión geométrica decreciente Es una progresión geométrica con la razón común cuyo valor absoluto es menor que 1.
Promedio geométrico La n-ésima raíz del producto de n elementos.
Punto base (abreviación **PB**) Es una centésima de 1%. PB = 0.0001. Un incremento de la tasa de interés de 7 a 9% es un incremento de 200 PB.
Puntos porcentuales La diferencia entre dos variables expresadas como porcentajes. 200 puntos base son 2 puntos porcentuales.

R

Racionamiento de capital Selección de proyectos de inversión cuando el número de proyectos que aumentan el valor de la empresa es mayor que la capacidad de la empresa para financiarlos y realizarlos.

Razón común En una progresión geométrica es la razón entre un término y el término anterior.

Redención anticipada Cláusula en el contrato del bono que permite al emisor, después de un número especificado de años, retirar el bono antes del vencimiento a un precio determinado. Es equivalente a la opción de compra a un precio de ejercicio que es el valor de redención. Los bonos que contienen esta cláusula se llaman *bonos redimibles* (*callable bonds*).

Refinanciamiento Otorgamiento de un nuevo crédito para que un deudor pueda pagar los intereses de un crédito antiguo.

Regla del 72 Una regla práctica para calcular el número de años necesarios para que el capital se duplique.

Relación de Fisher Una ecuación que relaciona la tasa de interés nominal con la tasa real y la tasa de la inflación. Simplificando un poco podemos decir que la tasa de interés nominal es la suma de la tasa real y la de la inflación.

Rendimiento al vencimiento (*tasa interna de retorno*) Es la tasa de descuento que iguala el valor presente de las entradas de efectivo con el valor presente de las salidas. En caso de un instrumento financiero se realiza el rendimiento al vencimiento sólo si se mantiene el título hasta su vencimiento.

Rendimiento al vencimiento compuesto realizado Rendimiento verdadero de un bono, calculado *ex post*, que toma en cuenta las tasas de reinversión de todos los cupones.

Rendimiento atractivo mínimo (*MARR*) El costo de capital de la empresa en el contexto de evaluación de *proyectos*.

Rendimiento corriente La razón entre el valor del cupón y el precio de compra del bono.

Rendimiento de las nuevas inversiones El incremento de las utilidades netas dividido entre la inversión neta.

Rendimiento del capital contable La razón entre las utilidades generadas por la empresa y el valor de la misma. Es el recíproco de la razón precio/utilidad.

Rendimiento del costo do oportunidad La tasa de descuento que iguala el valor presente del *valor terminal bruto* con el costo del proyecto.

Rendimiento del periodo de tenencia El rendimiento que obtiene el inversionista entre la fecha de adquisición y la fecha de venta de un título, si vende el instrumento antes del vencimiento.

Rendimiento hasta la redención Rendimiento que obtiene el tenedor del bono si el emisor ejerce el derecho a la redención anticipada.

Rendimiento real Véase: *tasa de interés real*.

Rendimiento requerido El rendimiento esperado mínimo necesario para que un inversionista compre un activo.

Renta en precios constantes Renta cuyos pagos crecen al ritmo de la inflación, o renta expresada en términos de una unidad de cuenta de poder adquisitivo constante.

Renta fija Instrumento de inversión cuyos flujos de efectivo y plazos de entrega son conocidos de antemano; bonos, obligaciones, pagarés, papel comercial y otros instrumentos de deuda.

Renta perpetua (*perpetuidad*) Anualidad que dura para siempre.

Renta variable Instrumentos de inversión cuyos flujos de efectivo no se conocen de antemano. Generalmente son acciones comunes de las empresas que se cotizan en la Bolsa de Valores.

Renta vitalicia Anualidad que dura mientras viva el beneficiario.

Riesgo de crédito (*riesgo de incumplimiento*) El riesgo de que el emisor no cumpla puntualmente con sus obligaciones. El riesgo de que los flujos de efectivo recibidos serán menores que los flujos esperados.

Riesgo de incumplimiento Véase: *riesgo de crédito*

Riesgo de la tasa de interés Véase: *riesgo de precio*

Riesgo de precio (*riesgo de la tasa de interés*) Riesgo de una pérdida de capital si un instrumento de renta fija tiene que venderse antes del vencimiento y en el momento de venta las tasas de interés son más altas que en el momento de compra.

Riesgo de reinversión Riesgo de que los cupones que produce el bono se tendrán que invertir a tasas de interés más bajas que el rendimiento al vencimiento.

S

Saldo de la deuda (*saldo insoluto*, *derecho del acreedor*) Monto original de la deuda menos todas las amortizaciones. Valor presente de los pagos pendientes.

Sensibilidad del valor futuro con respecto a las tasas de interés En el diseño de los fondos de retiro, el cálculo de qué tanto depende el valor futuro del fondo de los supuestos acerca de las tasas de interés futuras.

Serie aritmética Véase: *gradiente aritmético.*

Serie uniforme equivalente (*serie neta uniforme*: *SNU*) Es el pago periódico uniforme equivalente a una serie de pagos desiguales. Sirve para comparar proyectos con vidas diferentes o para poder utilizar las fórmulas de anualidades en el contexto de evaluación de proyectos.

Sistemas de amortización con pagos crecientes Modelo de amortización que prevé un incremento periódico de los pagos.

Sucesión Es una lista ordenada de números.

Supuesto de reinversión de cupones Supuesto de que los flujos de efectivo que produce el bono durante su existencia pueden ser invertidos a la tasa igual al rendimiento al vencimiento del bono.

T

Tabla de amortización Cuadro que muestra cómo los pagos periódicos reducen el saldo de la deuda.

Tabla de capitalización Cuadro que muestra cómo se construye un fondo de amortización mediante aportaciones periódicas y la capitalización de intereses.

Tasa a plazo Es la tasa de interés futura calculada con base en los precios de los bonos con diferentes vencimientos.

Tasa contable de rendimiento El flujo de efectivo promedio durante la vida del proyecto dividido entre el costo del mismo. Existen varios métodos para calcular la tasa contable de rendimiento.

Tasa de capitalización de mercado El rendimiento requerido promedio de todos los inversionistas.

Tasa de cupón Tasa contractual o tasa nominal. Es el rendimiento que produciría el bono con cupones si se vendiera a la par.

Tasa de interés Es el precio del dinero. Es lo que paga el que pide prestado los fondos a quien los presta.

Tasa de interés efectiva Es la tasa anual de crecimiento del dinero que toma en cuenta la frecuencia de capitalización.

Tasa de interés equivalente Tasa de interés que permite convertir una anualidad general en una anualidad simple.

Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE) Similar a la **TIIP** (Tasa de Interés Interbancaria Promedio) introducida en 1995 mide el costo al cual los bancos en promedio están indiferentes entre pedir y prestar dinero a 28 días. En México es la tasa de referencia más importante.

Tasa de interés nominal Es la tasa pactada, la que aparece en el contrato, expresada en términos de pesos corrientes.

Tasa de interés real Es la tasa de interés en términos de pesos constantes. Es la tasa nominal de la cual se ha eliminado el efecto de la inflación.

Tasa de porcentaje anual Tasa de interés efectiva que el deudor paga, calculada con base en el dinero que efectivamente recibe.

Tasa de reinversión Véase: *coeficiente de retención de utilidades.*

Tasa de rendimiento Es la ganancia del inversionista expresada en términos porcentuales.

Tasa de rendimiento a perpetuidad El índice de rentabilidad multiplicado por el costo de capital.

Tasa interna de retorno (*TIR*) En el contexto de evaluación de proyectos es la tasa de descuento que iguala el valor presente bruto de un proyecto con su costo.

Tasa interna de retorno modificada La tasa de descuento que iguala el valor futuro de los flujos de entrada con el valor presente de los flujos de salida.

Tasa libre de riesgo Es el rendimiento de instrumentos financieros que no tienen ni riesgo de crédito ni problemas de liquidez. Normalmente es la tasa de interés de los instrumentos del gobierno a corto plazo, como Cetes a 28 días en México, o certificados del Tesoro a un mes en Estados Unidos.

Tasas equivalentes Son dos tasas nominales diferentes, con diferente frecuencia de capitalización, que producen la misma tasa efectiva.

Teoría de las expectativas Teoría que afirma que las tasas de interés esperadas son iguales a las tasas a plazo calculadas a partir de los precios de los bonos.

Teoría de preferencia por liquidez Teoría que afirma que las tasas de interés esperadas son menores que las tasas a plazo calculadas a partir de los precios de los bonos. La diferencia entre las dos es la *prima de liquidez.*

Tiempo comercial Véase: *tiempo convencional.*

Tiempo convencional (*tiempo comercial*) Una convención de que un año tiene 360 días y un mes tiene 30 días.

Tiempo equivalente En problemas en los que se busca saldar un conjunto de obligaciones con un pago único determinado, es la fecha en la que debe hacerse dicho pago.

Tiempo real (*tiempo exacto*) Convención de tomar el número exacto de días entre dos fechas. Un año tiene 365 días y un año bisiesto tiene 366 días. Hay meses con 30 días y meses con 31 días.

U

Usura El cobro de la tasa de interés muy por arriba de la de mercado, aprovechando la debilidad financiera del deudor.

V

Valor de liquidación El valor de venta a precios de mercado de todos los activos de la empresa menos el valor nominal de sus deudas.

Valor de mercado El precio del activo que iguala la oferta con la demanda.
Valor de redención Valor del bono en el momento de redención estipulado en el contrato del bono. Normalmente es el valor nominal más uno o dos cupones semestrales.
Valor de reemplazo El costo a precios corrientes de reemplazar todos los activos de la empresa.
Valor del dinero en el tiempo Reconocimiento del hecho de que el dinero presente vale más que el dinero futuro y un conjunto de métodos que permiten comparar los flujos de efectivo que se producen en distintos momentos en el tiempo.
Valor en libros (valor contable o capital contable) Diferencia entre el valor total de los activos de la empresa y el valor total de los pasivos.
Valor en libros por acción El capital contable de la empresa dividido entre el número de acciones en circulación.
Valor fundamental El precio que los inversionistas con acceso a toda la información pertinente pagarían por un activo.
Valor futuro (*monto*) Valor de un instrumento al vencimiento. Es el principal más los intereses ganados.
Valor futuro de una anualidad Suma de los valores futuros de todos los pagos de una anualidad.
Valor intrínseco El valor presente de los flujos de efectivo netos que producirá un activo durante su vida descontado por la tasa que refleja el costo de capital ajustado por el riesgo.
Valor presente El valor de un flujo de efectivo o de un título en este momento. Dependiendo del contexto el valor presente es: el principal, el valor descontado del valor al vencimiento, el precio de un título, el costo de un proyecto.
Valor presente bruto Suma de los valores presentes de las entradas de efectivo generadas por un proyecto.
Valor presente de una anualidad Suma de los valores presentes de todos los pagos de una anualidad.
Valor presente neto Valor presente bruto menos el costo inicial del proyecto.
Valor teórico de la casa El valor de la casa calculado al capitalizar la renta neta que produce la casa con la tasa de interés real más la prima de riesgo.
Valor teórico de la empresa El valor de la empresa determinado según algún modelo de valuación, por ejemplo, el valor presente de los flujos de efectivo que la empresa producirá en el futuro. Véase: *valor fundamental*
Valor terminal neto El valor futuro de los flujos de efectivo del proyecto menos el valor futuro del costo inicial del mismo.
Valores equivalentes Flujos de efectivo con una estructura de pagos que llevados a un punto de tiempo, la fecha focal, son iguales a otros flujos con diferente estructura de pagos.
Valuación en curva Un método para calcular el valor de un bono entre la fecha de su compra y la de vencimiento que utiliza el interés compuesto.
Valuación en línea recta Un método aproximado para calcular el valor de un bono entre la fecha de su compra y el vencimiento que se basa en el supuesto de que el precio del bono crece en forma lineal. Los incrementos del valor del bono son iguales todos los días.
Valuación de mercado Un método de determinar el valor de un bono entre la fecha de su compra y la de vencimiento con base en el precio que se negocia en el mercado secundario.
Vuelta completa Compra y venta de un activo. En caso de varios activos, el regreso al activo original. Establecimiento y cierre de una posición financiera.

Respuestas a los problemas del final de capítulo

Capítulo 1

10. *a*) 0.92%
    b) 11.57% (tasa real efectiva)
12. 33.33%

Capítulo 2

3. 11.48%
4. 4 300.67
5. 4 448.36
6. *a*) 2.82%, *b*) 2.71% *c*) b
7. *a*) 7.78% *b*) 7.2165%
8. *a*) 11 250.00
9. *a*) 1.3863 *b*) 20.0855 *c*) 1.3053 *d*) 100 *e*) 3.5609
10. *a*) 8 *b*) 2 *c*) 2 *d*) 5
11. 35 meses 2.9169 años
12. 6 años

13. *a*) 2.81% *b*) 2.77%
14. 2 560 millones
15. $e^y = x$ $\ln x = y$
16. 153
17. 19
18. 15
19. 6 325 ($n = 46$)
20. 515.978
21. 1 280
22. 20
23. $r = 1.145$
24. $75 401.26
25. $1 326.24

Capítulo 3

4. $125
5. $150
6. $18 375
7. $3 666.67
8. $1 075
9. $1 125.00
10. $2 491.35
11. $2 000.00
12. 33.33%
13. 38.1%
14. 450 días
15. 360 días
16. *a*) $102 500 *b*) $106 666.67 *c*) 29.27%
19. *a*) $106 000 *b*) $103 414.63 *c*) 27.32%

Capítulo 4

1. $145.47
2. $146.83
3. $205.43
4. *a*) 4 212 *b*) 6.64
5. 3 000 en tres años.
6. $1 044.69
7. *a*) 79.59% *b*) 82.12%
8. 18.87%
9. 18.06%
10. 47.93%
11. 21.97%
12. 26.14%
13. 5.26%
14. 29.1%
15. 5.12
16. 57.71 meses
17. 5.95%
18. 11.52 años
19. 9.59%
20. 35.72%
21. 1.64%
22. *a*) 148.58% *b*) 1.7%
23. 34.49%
24. *a*) 3.42% *b*) 22.33% *c*) 0.98%
25. 0.84%
26. 7.14%
27. −9.45%
28. 64.87%
29. 22.14%

30. 9.53%
31. 20%
32. *a*) 21% *b*) 21.94% *c*) 22.13% *d*) 22.14%

Capítulo 5

1. $ 6411.66
2. ≤ $711.78
3. $595.56
4. $266 287.2
5. 7.457%
6. 40.81%
7. $10 450.38
8. $35 587.21
9. $498 101.40
10. $845 343.66

Capítulo 6

1. $8 517.65
2. $267 288.94
3. $3 249.81
4. $12 201.45
5. *a*) $1 578 526.68, *b*) no (2 011 357.18)
6. *a*) $567 608.65, *b*) $486 992.26, *c*) $426 399.72
7. $1 087 226.11
8. $153 791.34
9. $96 788.47
10. $10 006.07
11. $5 833.83
12. *a*) $42 620.87 *b*) $111 450.43
13. $4 116.55

14. *a*) Jetta \$12 329.09 Mercedes \$11 037.26 *b*) 7.1773%
15. 65.83
16. 3.5347%
17. 3.4884%
18. 34.9375%
19. 418.43
20. infinito
21. \$13 192.44
22. \$7 330.72
23. \$31 811.5
24. 42.04%
25. \$ 2 829.17

Capítulo 7

1. *a*) \$71 575.44 *b*) \$4 450.00
2. \$335 924.77
3. \$2 588.57
4. *a*) \$3 606.82 *b*) \$12 106.83 *c*) \$141 422.85
5. \$300
6. \$2 000.00
7. \$1 941 284.24
8. *a*) \$130 932.22 *b*) \$12 634.75
9. \$7 455 679.30
10. \$7 911.09
11. \$3 990.87
12. \$833 333.3
13. \$64 853 143.77
14. *a*) \$361 949.60 *b*) \$511 949.60
15. Tsuru
16. \$5 690 989.74

17. Udis 2 451 775.56 ~ $ 6 129 438.89
18. $240 000.00
19. *a*) 869.26 *b*) 241.14 *c*) 169.26 TIR 19.40%
20. *a*) 825.53 *b*) 225.53 TIR 30.43% *c*) 283.33 *d*) Sí

Capítulo 8

1. $342 857.14
2. 17.5%
3. 23.68%
4. *a*) 5.5% *b*) 1.375
5. 11.68%
6. $39.5
7. $45.16
8. $72.73
9. $50
10. 13.56%
11. $49
12. 12.6%
13. *a*) $50 *b*) $26.67 + $23.33
14. *a*) 6.67 *b*) 12.5
15. −1.53
16. 40

Capítulo 9

1. $116 143.31
2. $4 942.77
3. $7 895.46
4. $23 674.86
5. *a*) $1 070 020.7 *b*) $240 984.08
6. $289 645.78

7. *a*) $5 684 961.32 *b*) $284 238.67
8. *a*) $6 684 961.32 *b*) $334 237.02
9. $3 037.94
10. *a*) $8 274.4 *b*) $8 654.08
11. 10.63%
12. 23.34%
13. 23.36%
14. $525 179.58
15. $16 168.04
16. $1 421 961.85
17. $5 561.85
18. $189 791.51
19. $774 300.47
20. $9 527.25
21. $27.1983, al último pago hay que sumarle $1 773.16
22. $31 628.2
23. $105 449.68
24. $1 137 817.01 Fin de periodo $1 062.7
25. $3 092 907.29 Fin de periodo $2 594 531.25
26. *a*) $472 163.21 *b*) $467 624.5
27. $1 806 617.77

Capítulo 10

1. *b*) $439 666.61 $113 951.1 $186 048.9
2. $247 641.79
3. $N = 56.1421$ Último pago: $4 560.31
4. 26.03%
5. *a*) $15 663.5
6. $12 460.38 $48 460.38
7. *a*) $26 243.25

8. $9 401.22 $21 745.59
9. *b*) $267 288.94
10. $296 493.38

Capítulo 11

1. 27.09%, 84.8%
2. 24.6%, 77.02%, 6.12% anual
3. 28.12%, 88.04%
4. 81.59%, 106.48%
5. En el periodo 18.1572%. Anual 159.43%
6. *a*) $ 9.5324 *b*) 19.41%
7. *a*) $ 9.6910 *b*) 17.11%
8. 22.1854%
9. −1 318.06 (−1.56%)
10. $1 085 (61.49% anual)
11. *a*) $62.09 *b*) 11.51%
12. $1 285.91 14.86%
13. −51.59%
14. −7.98%
15. $94 329.8 ~ 9.43%

Capítulo 12

1. $858.73
2. $977.75
3. *a*) 11.4583% *b*) 11.6887% *c*) $94.265
4. *a*) 9.22% *b*) $85.8786 *c*) 7.5143%
5. $26
6. *a*) $90.1694 *b*) $1.21 *c*) $91.38
7. *a*) $ 923.06 *b*) $ 7.9994 *c*) 10.4%
8. *a*) 14.48% *b*) 15.71%

9. 14.21%
10. *a*) $903.09 *b*) $749.87 *c*) −7%
11. *a*) $94.6134 *b*) 9.62%
12. *a*) $96.4186 *b*) $2.4 *c*) $98.8194

Capítulo 13

1.

Año	Tasa de interés (%)	Precio	Rendimiento (%)
0	5.5	947.87	5.50
1	6.0	894.21	5.75
2	6.3	841.22	5.93
3	6.5	789.88	6.07

2. *a*) $963.53 *b*) $1 191.93
3. 6.9%
4. 5.85%
5. *a*) 9.8% *b*) 8.65% *c*) 6.72%
6. *a*) 19.23% *b*) 16.98%

Índice analítico

A

B

C

D

G

H

I

L

M

N

O

P

R

S

T

U

V

W